

Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Goniometrické funkce v aplikacích
Applications of trigonometric functions

František Hanzlík

Vedoucí práce: Mgr. Derek Pilous, Ph.D.
Studijní program: Specializace v pedagogice
Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání

Odevzdáním této bakalářské práce na téma Goniometrické funkce v aplikacích potvrzuji, že jsem ji vypracoval pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Praha, 4.5.2020

Děkuji vedoucímu mé bakalářské práce, Mgr. Derekovi Pilousovi, Ph.D., za pomoc, kterou mi v průběhu vypracovávání této práce poskytl.

ABSTRAKT

Tato bakalářská práce je určena odborné i laické veřejnosti, která má zájem o rozšíření svých znalostí goniometrických funkcí a zejména o příklady jejich využití. Cílem práce je přestavit možnost aplikování goniometrických funkcí v různých oblastech vědy, ve kterých se typicky objevují. Úvod práce je věnován zavedení goniometrických funkcí na úrovni středoškolské matematiky. Poté jsou zformulovány některé základní věty vztahující se k tématu práce (věta sinová, kosinová, součtové vzorce). Bez znalosti těchto vět nelze v goniometrii provádět jiné než elementární výpočty, proto jsou vždy uvedeny i s důkazem. Příklady použití goniometrických funkcí uvedené v této práci mají přesah do oblastí mimo matematiku, proto je součástí každého tématu krátký úvod. Stěžejní část úloh je nicméně zaměřena na goniometrické funkce. Větší prostor je věnován početním postupům a vlastnostem goniometrických funkcí. V teoretické části jsou zmíněny pouze základní pojmy a definice, které jsou pak nezbytné pro praktickou (početní) část. Vybrané příklady jsou pro většinu témat charakteristické. Jednotlivé příklady užití goniometrických funkcí spolu většinou nesouvisí, proto je práce rozdělena do několika samostatných kapitol. Postupy výpočtu složitějších příkladů, které vyžadují např. určení primitivní funkce, jsou v textu stručně naznačeny. Témata kapitol jsou vzhledem k charakteru práce rozmanitá. Přitom možnosti aplikování goniometrických funkcí jsou u každého tématu mnohem širší. Uvést vyčerpávající přehled všech možností však v bakalářské práci nelze. Zaměření kapitol a příkladů jsou voleny i s ohledem na lepší srozumitelnost. Od čtenářů se nicméně očekává schopnost provádět algebraické úpravy výrazů a jiné základní matematické operace, zde jsou postupy výpočtu příkladů uvedeny jen v náznacích.

KLÍČOVÁ SLOVA

Goniometrické funkce, aplikace, elektromagnetické vlny, zvukové a optické jevy

ABSTRACT

This bachelor's work is determined to professional and lay public which is interested in widening its knowledge of goniometric functions and primarily in the examples of its applications. The target of this work is to demonstrate the potential of applications of goniometric functions in various fields of science in which their appearance is characteristic. The beginning to the work is dedicated to introduction of goniometric functions at secondary school level. Then, important basic theorems are formulated which are connected to the theme of this work (sine theorem, cosine theorem, sum formulas). Without knowledge of these formulas, it is impossible to perform non-elementary calculations, therefore the formulas are always given with proof. The examples of applications of goniometric functions have an overlap in areas beyond mathematics, therefore one part of each topic is short introduction. However, the core part of the tasks is focused on goniometric functions. Greater space is devoted to numerical procedures and to properties of goniometric functions. In theoretical part, only basic terms and definitions are mentioned which are necessary to practical part. The examples chosen are for most of topics typical. As a rule, single examples of applications of goniometric functions are not related to each other, therefore this bachelor's work is divided into several separate chapters. Procedures of calculating more complex examples are briefly suggested (for example if determining of primitive function is required). The topics of the chapters are various with regard character of this work. At the same time, possibilities of making use of goniometric functions are much wider by each topic. However, they cannot be listed in full in bachelor's work. Focus of the chapters and examples is made so that intelligibility is better. The ability of making algebraic adjustments to expressions is expected. In this work, such calculations are just indicated.

KEYWORDS

Goniometric functions, applications, astronomy, electromagnetic waves, acoustical and optical phenomena

Obsah

Úvod	6
1 Teorie goniometrických funkcí	8
2 Aplikace.....	26
2.1 Coriolisova síla	26
2.2 Nakloněná rovina	32
2.3 Matematické kyvadlo	34
2.4 Křivočaré rovnoměrné pohyby	35
2.5 Elektromagnetické vlny a kmity	38
2.6 Volné harmonické kmity.....	42
2.7 Určování polohy Slunce.....	45
2.8 Pohyb planet v polární souřadnicové soustavě	49
2.9 Ozubené soukolí s proměnlivým převodem.....	52
2.10 Lámavé hranoly	59
2.11 Šikmý vrh.....	62
2.12 Potenciál gravitačního pole	70
2.13 Simulační modely	73
2.14 Řešení metodou perturbace	75
2.15 Automatizace chladících zařízení	78
2.16 Ochlazování nebo ohřev rovinné desky	80
2.17 Červenkovovo záření	82
Závěr.....	85
Seznam použitých informačních zdrojů	87

Úvod

Cílem této bakalářské práce je představit čtenářům okruh vědních disciplín, ve kterých se při výpočtech nelze obejít bez aplikací goniometrických funkcí a vztahů mezi nimi. Goniometrické funkce totiž neslouží jen k samoučelným výpočtům v trojúhelnících, ale je možné je uplatnit v celé řadě věd, zpravidla přírodovědného zaměření: v astronomii, při popisu fyzikálních jevů na zemské kouli, při charakterizování zvukových vln a optických jevů, při popisu průběhu pohybu tělesa nebo šikmého vrhu a řadě jiných případů. Všem zmíněným případům je v práci věnována samostatná kapitola.

Každá kapitola se skládá z teoretického úvodu do dané oblasti a z jednoho nebo dvou početních příkladů. Účelem teoretické části je demonstrovat uplatnitelnost goniometrických funkcí právě v této oblasti vědy a také seznámit čtenáře se základní terminologií, případně vysvětlit složitější termíny, které se objevují v početní části. V početní části je předvedeno buď pouhé používání vzorců z teorie v praxi, nebo je k vyřešení příkladu nezbytné ovládat i jiné partie matematiky na vyšší úrovni (například integrály). V takovém případě je vždy uveden stručný postup výpočtu těchto složitějších příkladů. Pokud je to nutné, jsou příklady nebo teoretická část doplněny obrázkem – kopií z literatury, nebo vytvořeným v programu GeoGebra. Hlubší znalost matematiky ani jiných věd se pro pochopení textu od čtenáře neočekává.

Úvodní kapitola zavádí nejběžnější definice základních goniometrických funkcí v rozsahu odpovídajícím středoškolské matematice. Následně jsou v ní zformulovány nejdůležitější věty, které je nutné znát pro praktické výpočty: sinová věta, kosinová věta, součtové vzorce. Tyto věty jsou kvůli svému významu uvedeny i s důkazem. Další kapitoly se již zaměřují na aplikační případy. Vzhledem k povaze práce se každá kapitola zabývá odlišnou vědní disciplínou.

Goniometrické funkce lze uplatnit v mnoha přírodovědných oblastech, zejména v takových, ve kterých lze probíhající děje znázornit periodickou křivkou (například elektromagnetické vlnění), nebo ve kterých lze uplatnit diferenciální rovnice. V práci je prezentován příklad, ve kterém se goniometrické funkce užívají při počítání integrálů metodou substituce. V dalších příkladech se využívají jejich charakteristické vlastnosti, které jsou rozšířeny na jevy vyskytující se v příkladu (periodicita, ...).

Tato bakalářská práce nemá za cíl zabývat se rozličnými možnostmi definování goniometrických funkcí a má být srozumitelná absolventům středoškolského vzdělání, proto jsou v ní goniometrické funkce zavedeny jen jedním způsobem, který byl popsán výše. Smyslem práce je představit praktické využití těchto funkcí. Takové pojetí je jejím hlavním přínosem.

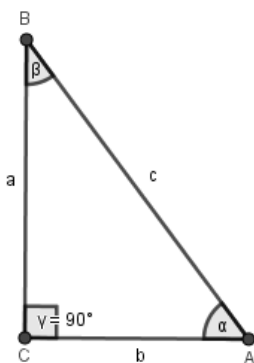
..

1 Teorie goniometrických funkcí^[1]

Cílem práce je představit a v dalších kapitolách ukázat konkrétní použití čtyř základních goniometrických funkcí, které se ve středoškolské matematice používají nejčastěji. Tyto funkce se typicky uplatňují při výpočtech veličin v trojúhelníku, což jsou nejčastěji délky stran trojúhelníku a velikosti jeho vnitřních úhlů; na jejich základě lze poté spočítat i jiné charakteristiky trojúhelníku (například velikost poloměru kružnice trojúhelníku opsané ze sinové věty apod.). Základní definice goniometrických funkcí vychází z pravoúhlého trojúhelníku, který je standartně značen jako trojúhelník ABC s délkou přepony (tedy nejdelší strany v trojúhelníku) $c = |AB|$ a s délkami odvěsen $a = |BC|$ a $b = |CA|$. Protože je v pravoúhlém trojúhelníku je pravý úhel právě jeden a je to největší z jeho vnitřních úhlů, a protože v každém trojúhelníku leží nejdelší strana proti největšímu vnitřnímu úhlu, je pravý úhel při takovém značení vždy u vrcholu C , takže platí

$$|\sphericalangle ACB| = \gamma = \frac{\pi}{2}.$$

Zbývající dva vnitřní úhly se obvykle značí $\alpha := |\sphericalangle BAC|$ a $\beta := |\sphericalangle ABC|$; oba tyto úhly jsou ostré. Goniometrické funkce je samozřejmě možné použít v každém pravoúhlém trojúhelníku bez ohledu na jeho značení, nicméně v dalším textu bude používána konvence popsaná výše.



Obrázek č. 1: Pravoúhlý trojúhelník

V takovém pravoúhlém trojúhelníku je možné využít pro výpočet některého vnitřního ostrého úhlu goniometrické funkce za předpokladu, že jsou dány velikosti alespoň dvou jeho stran. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že chceme spočítat velikost úhlu α .

K tomu můžeme použít goniometrickou funkci sinus za předpokladu, že známe velikost odvěsny a a přepony c . Výpočet funkční hodnoty funkce sinus pro úhel α označujeme $\sin(\alpha)$. Funkci sinus definujeme jako poměr délky odvěsny protilehlé úhlu α a délky přepony trojúhelníka ABC (viz Obrázek č. 1). Výpočet úhlu α pomocí funkce sinus zapisujeme

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}.$$

Zde je nutné upozornit na to, že úhel α musí být ostrý, čili je prvkem intervalu $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Tupý úhel o velikosti $\alpha_2 = \pi - \alpha$ není vnitřním úhlem trojúhelníku ABC a nevyhovuje tudíž podmínkám takto zadané úlohy. Proto úhel α_2 není vnitřním úhlem pravoúhlého trojúhelníka, přestože i pro něj je splněna rovnost

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}.$$

Pokud neznáme velikost odvěsny a , existují ještě jiné způsoby, jak vypočítat velikost úhlu α . Známe-li v trojúhelníku ABC velikost přepony c a velikost odvěsny b přiléhající k úhlu α , lze pro výpočet úhlu α použít goniometrickou funkci kosinus. Skutečnost, že odvěsna b přiléhá k úhlu α znamená, že strana $b = |AC|$ leží na polopřímce, která tvoří jedno rameno úhlu α . Funkci kosinus definujeme jako poměr velikosti odvěsny b a přepony c . To zapisujeme

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c}.$$

Zde je velikost úhlu α určena jednoznačně, neboť pro ostré úhly je funkce kosinus rovna kladnému číslu, zatímco pro tupé úhly je záporná.

Velikost úhlu α ale můžeme zjistit také v případě, že neznáme délku přepony pravoúhlého trojúhelníku, ale jsou zadány velikosti jeho obou odvěsen. V takovém případě lze pro výpočet α použít goniometrickou funkci tangens. Funkční hodnotu funkce tangens pro úhel α značíme $\operatorname{tg}(\alpha)$ (ve starší literatuře se lze setkat i s označením $\tan(\alpha)$) a definujeme ji jako podíl délek odvěsny a protilehlé úhlu α a odvěsny b přilehlé úhlu α . To zapisujeme

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{a}{b}.$$

Každý úhel α , který splňuje tuto rovnost, je vnitřním úhlem trojúhelníka ABC . Pro všechny ostré úhly je hodnota funkce tangens kladná. Protože hodnota zlomku

$$\frac{a}{b}$$

je stejná jako hodnota

$$\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}},$$

protože platí

$$\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b},$$

definujeme funkci tangens také jako

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

pro všechny přípustné úhly α . To jsou všechny úhly, jejichž kosinus je různý od nuly. Jak vyplývá dále, je v trojúhelníku ABC kosinus nenulový pro všechny úhly α , které nejsou pravé; musí tedy být

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2}.$$

Že pro pravé úhly není funkce tangens definována, je zřejmé také z toho, že pravému úhlu obě odvěsny přiléhají; neexistuje tudíž odvěsna protilehlá úhlu

$$\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Není tedy splněna základní definice funkce tangens.

Obrácený poměr délek odvěsen trojúhelníka ABC , tedy podíl odvěsny b přilehlé úhlu α a odvěsny a protilehlé úhlu α , udává hodnotu funkce kotangens. Její funkční hodnota pro úhel α se zapisuje $\operatorname{cotg}(\alpha)$. Z její definice je zřejmé, že funkce kotangens lze ekvivalentně určit jako převrácenou hodnotu funkce tangens pro všechny úhly α , pro které je funkce tangens definovaná. I tato funkce udává řešení jednoznačně: každému ostrému úhlu α

odpovídá kladná hodnota funkce kotangens. Ani tuto funkci nemá smysl použít pro pravý úhel, protože

$$\cotg\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

což pro poměr délek stran trojúhelníka ABC , které jsou všechny kladné, nemůže nikdy nastat.

Všechny takto definované goniometrické funkce platí pro každý ostrý úhel trojúhelníku ABC , tedy také pro úhel β . Vždy je přitom nutné uvědomit si, která odvěsna je vůči danému úhlu přilehlá a která protilehlá.

Sinová a kosinová věta

Zatímco funkce tangens a kotangens lze využít pro výpočty pouze v pravoúhlém trojúhelníku, tak funkce sinus a kosinus se používají i ve všech trojúhelnících, které jsou ostroúhlé (čili mají všechny tři vnitřní úhly ostré), nebo tupoúhlé (mají jeden vnitřní úhel tupý a dva ostré). Funkce sinus (resp. kosinus), definované v pravoúhlém trojúhelníku na obrázku č. 1, jsou vlastně speciálním použitím věty sinové (resp. kosinové). Uvažujme nyní opět trojúhelník ABC (Obrázek č. 1), ve kterém již máme definované goniometrické funkce. Zabývejme se nejprve funkcí sinus a úhlem α . Rovnost

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$$

lze ekvivalentně zapsat ve tvaru

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = c.$$

Délka přepony c je tedy rovna podílu délky odvěsny a a sinu úhlu protilehlého k této odvěsně. Proti přeponě c leží pravý úhel $|\sphericalangle ACB| = \gamma$, pro který je $\sin(\gamma) = 1$. Proto můžeme využít rovnost

$$c = \frac{c}{\sin(\gamma)}.$$

Z toho vyplývá, že platí rovnost

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}.$$

Pokud bychom pomocí funkce sinus zjišťovali velikost úhlu β , získali bychom analogicky další rovnost

$$\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}.$$

Jejich porovnáním dojdeme k závěru, že platí

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}.$$

Tento vztah vyplývá také ze sinové věty pro pravoúhlý trojúhelník. Jak ale už bylo zmíněno, platí sinová věta pro všechny typy trojúhelníků (z hlediska velikostí jejich vnitřních úhlů).

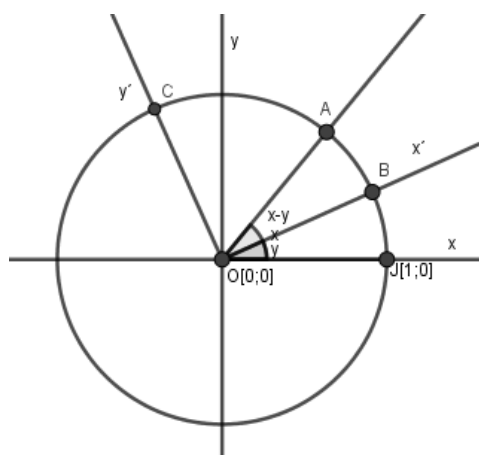
V dalším textu vyslovím a dokážu platnost věty sinové a kosinové, k tomu je ale nutné nejprve zformulovat součtové vzorce a dokázat jejich platnost.

Věta (součtové vzorce):

Pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí vztahy

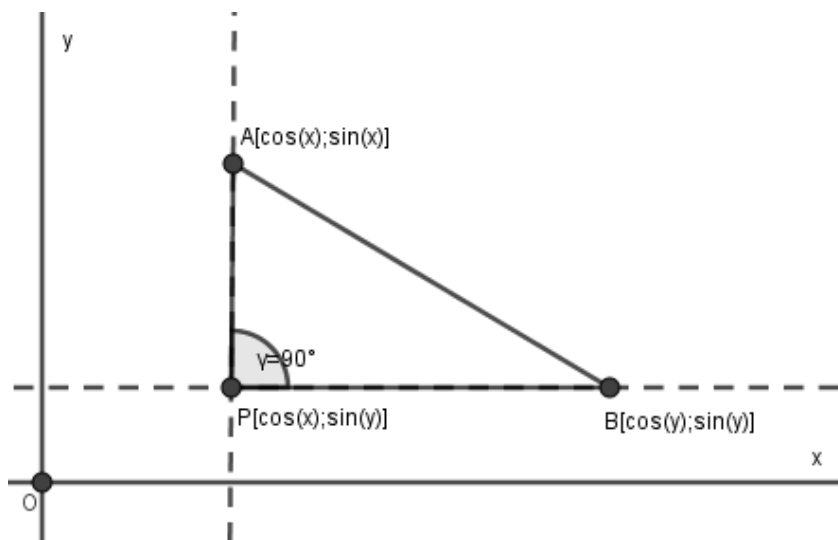
- i. $\sin(x + y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y);$
- ii. $\sin(x - y) = \sin(x) \cdot \cos(y) - \cos(x) \cdot \sin(y);$
- iii. $\cos(x + y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y);$
- iv. $\cos(x - y) = \cos(x) \cdot \cos(y) + \sin(x) \cdot \sin(y).$

Důkaz. Dokážu postupně platnost všech čtyř součtových vzorců s tím, že nejprve je třeba dokázat vzorec (iv). Necht' jsou čísla x, y nejprve z intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$ a $x > y$. Tato čísla představují velikosti úhlů JOA, JOB , které jsou znázorněny na jednotkové kružnici se středem v počátku soustavy souřadnic Oxy na obrázku č. 2.



Obrázek č. 2

Body A a B přitom leží na této kružnici a pro jejich souřadnice platí $A[\cos(x); \sin(x)]$ a $B[\cos(y); \sin(y)]$. Nyní povedu bodem A přímku rovnoběžnou se souřadnicovou osou y a bodem B přímku rovnoběžnou se souřadnicovou osou x ; jejich průsečíkem je bod P , který má souřadnice $P[\cos(x); \sin(y)]$ – viz Obrázek č. 3:



Trojúhelník PBA je pravoúhlý s přeponou BA a lze v něm proto použít Pythagorovu větu ve tvaru

$$|AB|^2 = |PB|^2 + |AP|^2.$$

Dále vyjádřím délku odvěsny

$$|PB| = \sqrt{(\cos(y) - \cos(x))^2 + (\sin(y) - \sin(y))^2} = |\cos(x) - \cos(y)|,$$

a podobně pro délku úsečky AP platí

$$|AP| = |\sin(x) - \sin(y)|.$$

Pokud nyní takto vyjádřené velikosti stran trojúhelníku dosadím do rovnosti

$$|AB|^2 = |PB|^2 + |AP|^2,$$

dostanu

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= |\sin(x) - \sin(y)|^2 + |\cos(x) - \cos(y)|^2 = \\ &= \sin^2(x) + \cos^2(x) + \sin^2(y) + \cos^2(y) - 2 \cdot \sin(x) \cdot \sin(y) - \\ &= 2 \cdot \cos(x) \cdot \cos(y) = 2 - 2 \cdot \sin(x) \cdot \sin(y) - 2 \cdot \cos(x) \cdot \cos(y). \quad (1) \end{aligned}$$

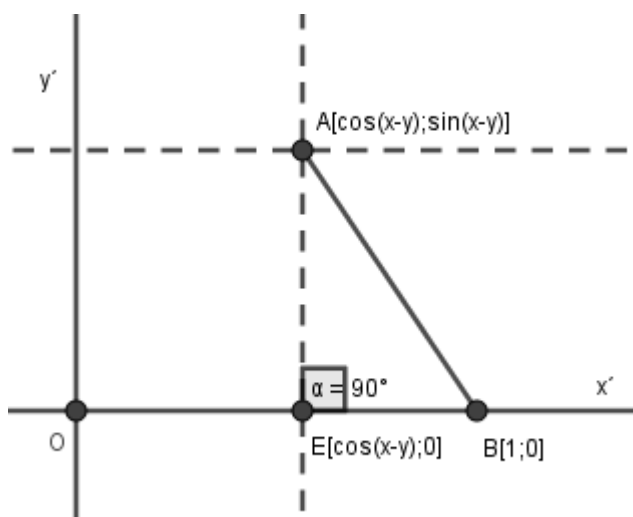
Při úpravách byl dvakrát použit vztah

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1,$$

který platí pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Nyní vyjádřím velikost $|AB|^2$ jiným způsobem. Úhel BOA na obrázku č. 2 má velikost $x - y$. Tento úhel otočím kolem počátku O o úhel $-y$.

Nyní se zaměříme na obrázek č. 4.



Bod $B = [1; 0]$ leží na souřadnicové ose x a bod A leží na jednotkové kružnici a má souřadnice $A[\cos(x - y); \sin(x - y)]$. Bodem A vedeme rovnoběžku se souřadnicovou osou y ; její průsečík s osou x označíme E , který má souřadnice $E[\cos(x-y); 0]$. Trojúhelník

EBA je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu E a lze v něm proto zformulovat Pythagorovu větu

$$|AB|^2 = |EB|^2 + |EA|^2.$$

Vyjádřím velikost úsečky

$$|EB| = \sqrt{(1 - \cos(x - y))^2 + (0 - 0)^2} = |1 - \cos(x - y)|.$$

Analogicky pro velikost odvěsny AE dostanu

$$|AE| = |\sin(x - y)|.$$

Po dosazení těchto vyjádření do rovnosti

$$|AB|^2 = |EB|^2 + |EA|^2$$

a po provedení příslušných úprav dostanu

$$|AB|^2 = 2 - 2 \cdot \cos(x - y). \quad (2)$$

Dalším krokem je porovnání rovností (1) a (2). Protože se jejich levé strany rovnají $|AB|^2$, lze porovnat také jejich pravé strany. Po odečtení čísla 2 od obou stran takto vzniklé rovnosti a po jejich vydělení (-2) získáváme

$$\cos(x - y) = \cos(x) \cdot \cos(y) + \sin(x) \cdot \sin(y)$$

pro $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$, $y \in \langle 0; 2\pi \rangle$, $x > y$.

Pokud je $x, y \in \langle 0; 2\pi \rangle$ a $x = y$, tak po dosazení do již dokázané rovnosti dostávám

$$\cos(x - x) = \cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot \sin(x),$$

a protože je $\cos(0) = 1$, dostáváme pravdivou rovnost

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

Pokud je $x, y \in \langle 0; 2\pi \rangle$ a $x < y$, tak upravím

$$\cos(x - y) = \cos[-(y - x)] = \cos(y - x),$$

protože funkce kosinus je sudá. Tím byl případ převeden na již dokázanou část, kdy menšenec v argumentu funkce kosinus je větší než menšitel. Tím je dokázáno, že rovnost (iv) platí pro každé $x, y \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

Nyní dokážu, že tento vzorec platí pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. K tomu využiji periodicity funkcí sinus a kosinus: nejmenší perioda obou těchto funkcí je 2π . Z definice periodicity vyplývá, že je-li například funkce kosinus periodická (s periodou 2π), platí pro každé $k \in \mathbb{Z}$ a $x \in \mathbb{R}$ vztah

$$\cos(x + k \cdot 2\pi) = \cos(x).$$

Proto můžu s využitím faktu, že $k - m \in \mathbb{Z}$, upravovat levou stranu rovnosti (iv)

$$\begin{aligned} \cos(x - y) &= \cos[(x_0 + k \cdot 2\pi) - (y_0 + m \cdot 2\pi)] = \cos[(x_0 - y_0) + 2 \cdot (k - m)\pi] = \\ &= \cos(x_0 - y_0). \end{aligned}$$

Pravou stranu této rovnosti upravím obdobně

$$\begin{aligned} \cos(x) \cdot \cos(y) + \sin(x) \cdot \sin(y) &= \cos(x_0 + k \cdot 2\pi) \cdot \cos(y_0 + m \cdot 2\pi) + \sin(x_0 + k \cdot \\ &+ 2\pi) \cdot \sin(y_0 + m \cdot 2\pi) = \cos(x_0) \cdot \cos(y_0) + \sin(x_0) \cdot \sin(y_0). \end{aligned}$$

Porovnáním výsledných výrazů po úpravách levé i pravé strany dostáváme, že platí

$$\cos(x_0 - y_0) = \cos(x_0) \cdot \cos(y_0) + \sin(x_0) \cdot \sin(y_0).$$

Protože je

$$x_0, y_0 \in \langle 0; 2\pi \rangle,$$

jsou x, y reálná čísla a rovnost (iv) tedy platí pro každé $x, y \in \mathbb{R}$. Tím je důkaz součtového vzorce (iv) dokončen.

Jako druhý dokážu součtový vzorec (i). K tomu nejprve vyslovím a dokážu pomocnou větu, jejíž tvrzení pak při důkazu použiji.

Věta Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

- a) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x);$
- b) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x).$

Důkaz a) Upravím levou stranu rovnosti podle součtového vzorce (iv), který jsem již dokázal. Platí

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin(x) = \sin(x),$$

protože

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ a } \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

b) K důkazu této části využiji již dokázaný vztah *a*). Jestliže je

$$\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

tak je

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \cos(x).$$

Tím je pomocná věta dokázána.

Pro důkaz vzorce *(i)* provedu následující úpravy:

$$\begin{aligned}\sin(x + y) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (x + y)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - y\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos(y) + \\ &\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \sin(y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y).\end{aligned}$$

V první rovnosti je použit vztah *a*), ve třetí rovnosti součtový vzorec *(iv)* a ve čtvrté rovnosti jsou uplatněny vztahy *a*) a *b*) z pomocné věty.

Důkaz vzorce *(ii)* provedu převedením vzorce na případ *(i)*:

$$\sin(x - y) = \sin[x + (-y)] = \sin(x) \cdot \cos(-y) + \cos(x) \cdot \sin(-y) = \sin(x) \cdot \cos(y) - \cos(x) \cdot \sin(y).$$

Využil jsem zde dokázaný součtový vzorec a také faktu, že funkce kosinus je sudá a funkce sinus je lichá.

Obdobně dokážu vzorec *(iii)* převedením na případ *(iv)*:

$$\begin{aligned}\cos(x + y) &= \cos[x - (-y)] = \cos(x) \cdot \cos(-y) + \sin(x) \cdot \sin(-y) = \cos(x) \cdot \\ &\cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y).\end{aligned}$$

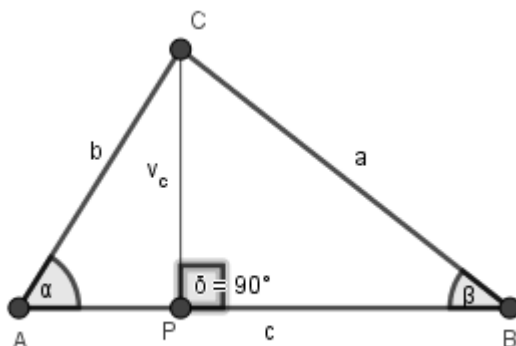
Tím je důkaz všech součtových vzorců proveden. Proto nyní můžu přejít k vyslovení a důkazu sinové a kosinové věty.

Věta (Sinová věta): V každém trojúhelníku ABC , který má délky stran $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$ a velikosti vnitřních úhlů $\alpha = |\sphericalangle BAC|$, $\beta = |\sphericalangle ABC|$, $\gamma = |\sphericalangle BCA|$, platí

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}.^{1}$$

Důkaz: Důkaz provedeme metodou rozboru případů podle typu trojúhelníku z hlediska jeho vnitřních úhlů, kdy budeme nejprve uvažovat ostroúhlý trojúhelník, a poté tupoúhlý trojúhelník. Že sinová věta platí i pro pravoúhlý trojúhelník, bylo ukázáno v předchozím textu.

Nechť je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s obvyklým značením stran a úhlů, viz obr. č. 5.



V něm je znázorněna výška v_c na stranu c , a pata P této výšky. Výška v_c dělí trojúhelník ABC na pravoúhlý trojúhelník APC s pravým úhlem u vrcholu P a na pravoúhlý trojúhelník PBC s pravým úhlem rovněž u vrcholu P , ve kterých lze použít goniometrické funkce tak, jak jsme je zavedli. Sjednocením těchto dvou pravoúhlých trojúhelníků vznikne původní trojúhelník ABC . V trojúhelníku APC platí vztah

$$\sin(\alpha) = \frac{v_c}{b}$$

a v trojúhelníku PBC obdobně

$$\sin(\beta) = \frac{v_c}{a}.$$

Vyjádřením velikosti výšky v_c a porovnáním obou rovností dostaneme vztah

¹¹ Každý z podílů $\frac{a}{\sin(\alpha)}$, $\frac{b}{\sin(\beta)}$, $\frac{c}{\sin(\gamma)}$ je roven $2r$, kde r je poloměr kružnice trojúhelníku ABC opsané.

$$b \cdot \sin(\alpha) = a \cdot \sin(\beta),$$

z něhož vyplývá rovnost

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}. \quad (3)$$

Rozdělme nyní analogicky trojúhelník ABC výškou v_b na stranu b na pravoúhlý trojúhelník AP_bB s pravým úhlem u vrcholu P_b a na pravoúhlý trojúhelník CP_bB s pravým úhlem u vrcholu P_b , který je současně patou v_b na stranu b . V obou pravoúhlých trojúhelnících opět použijeme goniometrické funkce a získáme rovnosti

$$\sin(\alpha) = \frac{v_b}{c}$$

v trojúhelníku AP_bB , a

$$\sin(\gamma) = \frac{v_b}{a}$$

v trojúhelníku CP_bB . Vyjádřením v_b a porovnáním rovností získáme další vztah pro

$$\frac{a}{\sin(\alpha)},$$

a to

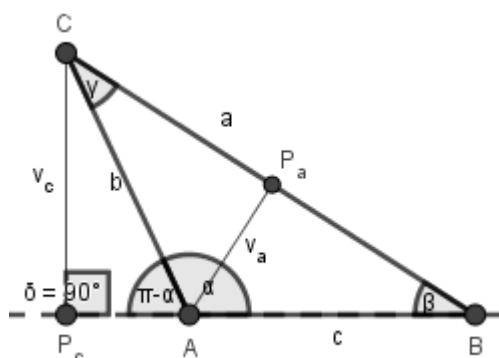
$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}. \quad (4)$$

Protože se rovnají levé strany rovností (3) a (4), platí také rovnost jejich pravých stran. Odtud dostáváme celkový výsledek

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}.$$

Tím je dokázána platnost sinové věty pro libovolný ostroúhlý trojúhelník.

Uvažujme nyní tupoúhlý trojúhelník ABC s tupým úhlem u vrcholu A – viz obrázek č. 6:



Obrázek č. 6: Tupoúhlý trojúhelník

Pata výšky v_c na stranu c leží na polopřímce \overrightarrow{AB} a není bodem strany AB . Proto má trojúhelník BP_cC větší obvod než zadaný trojúhelník ABC . Znázorněním výšky v_c vznikl pravoúhlý trojúhelník BP_cC s pravým úhlem u vrcholu P_c a pravoúhlý trojúhelník AP_cC s pravým úhlem u vrcholu P_c . V nich lze znovu použít goniometrické funkce. Je třeba si uvědomit, že úhel CAP_c má velikost $\pi - \alpha$, protože úhly BAC a CAP_c jsou vedlejší. V trojúhelníku AP_cC nyní můžeme vyjádřit

$$\sin(\pi - \alpha) = \frac{v_c}{b},$$

a z trojúhelníku BP_cC dostaneme

$$\sin(\beta) = \frac{v_c}{a}.$$

Nyní je účelné upravit levou stranu první rovnosti s využitím součtového vzorce pro funkci sinus následovně:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\pi) \cdot \cos(\alpha) - \cos(\pi) \cdot \sin(\alpha) = \sin(\alpha),$$

protože $\sin(\pi) = 0$ a $\cos(\pi) = -1$.

První rovnost nyní získává tvar

$$\sin(\alpha) = \frac{v_c}{b}.$$

Nyní lze získat dvojí vyjádření pro velikost v_c a porovnáním obou vyjádření dostaneme opět vztah

$$a \cdot \sin(\beta) = b \cdot \sin(\alpha),$$

ze kterého vyplývá rovnost (3) ve tvaru

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}.$$

Výška v_a na stranu a v trojúhelníku ABC opět dělí zadaný trojúhelník na dva pravoúhlé trojúhelníky s pravým úhlem v obou případech u vrcholu P_a , což je také pata této výšky na stranu a . Z trojúhelníku AP_aB zjistíme velikost výšky v_a ze vztahu

$$\sin(\beta) = \frac{v_a}{c}$$

a z trojúhelníku CP_aA ze vztahu

$$\sin(\gamma) = \frac{v_a}{b}.$$

Porovnáním těchto vyjádření a úpravou zlomků získáme další rovnost

$$\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}. \quad (4)$$

Porovnáním rovností (3) a (4) dostaneme vztah

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)},$$

což je rovnost vyplývající ze sinové věty platná pro libovolný tupouhlý trojúhelník.

Sinová věta byla dokázána pro každý pravoúhlý, ostroúhlý i tupouhlý trojúhelník. Nyní ukážeme, že také goniometrickou funkci kosinus lze použít k výpočtům ve všech typech trojúhelníků, a to formulací tzv. Kosinové věty a jejím důkazem.

Věta (Kosinová): V každém trojúhelníku ABC s délkami stran $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|AC| = b$ a s velikostmi úhlů $|\sphericalangle CAB| = \alpha$, $|\sphericalangle ABC| = \beta$, $|\sphericalangle BCA| = \gamma$ platí

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha).^2$$

² Kosinovou větu lze formulovat také pro úhel β a γ , a to správnou záměnou stran tak, aby v uvedené formulaci byla na levé straně rovnosti druhá mocnina strany protilehlé úhlu, jehož kosinus počítáme. Větu lze tudíž také ekvivalentně vyjádřit vztahy $b^2 = c^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$ a $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$.

*Důkaz:*³

Větu dokážeme zvlášť pro případ, kdy trojúhelník ABC je ostroúhlý, pravoúhlý a tupoúhlý. Mějme nejprve ostroúhlý trojúhelník ABC s obvyklým značením stran a úhlů (viz obrázek č.5). Výška v_c na stranu c jej rozdělí na pravoúhlý trojúhelník APC s pravým úhlem u vrcholu P , a na pravoúhlý trojúhelník BPC s pravým úhlem u vrcholu P , který je současně patou výšky v_c na stranu c . V trojúhelníku APC nyní použijeme goniometrické funkce pro úhel α . Platí vztah

$$\cos(\alpha) = \frac{|AP|}{b},$$

odkud vyjádříme

$$|AP| = b \cdot \cos(\alpha), (5)$$

a vztah

$$\sin(\alpha) = \frac{v_c}{b},$$

odkud plyne

$$v_c = b \cdot \sin(\alpha). (6)$$

Navíc je $|AB| = c = |AP| + |PB|$, což je ekvivalentní výrazu

$$|PB| = c - |AP|. (7)$$

Nyní se zaměříme na trojúhelník BPC , ve kterém lze uplatnit Pythagorovu větu ve tvaru

$$a^2 = |PB|^2 + v_c^2.$$

Když za sčítance na pravé straně rovnosti dosadíme jejich vyjádření z rovností (5), (6) a (7), dostaneme postupně

$$a^2 = (c - |AP|)^2 + v_c^2,$$

což dále upravíme následovně:

³ Důkaz správnosti věty bychom provedli stejně i při jiném označení stran a úhlů trojúhelníka. Rovnost (8) by zůstala v platnosti, pouze by v ní délky stran a velikost úhlu byly označeny jinak.

$$a^2 = (c - b \cdot \cos(\alpha))^2 + (b \cdot \sin(\alpha))^2 = c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) + b^2 \cdot \cos^2(\alpha) + b^2 \cdot \sin^2(\alpha) = c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) + b^2 \cdot (\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)) = c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) + b^2.$$

Odtud již dostáváme vztah

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha).$$

Tím je dokázáno, že kosinová věta platí v každém ostroúhlém trojúhelníku.

Uvažujme nyní pravoúhlý trojúhelník ABC , jehož pravý úhel je bez újmy na obecnosti úhel u vrcholu A , tedy úhel α . Pak lze do rovnosti z kosinové věty dosadit za úhel α hodnotu

$$\frac{\pi}{2},$$

což znamená, že $\cos(\alpha)$ je v tomto případě roven nule, a proto je i člen $-2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$

roven nule. Tím je rovnost v kosinové větě zredukována na tvar

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

což je znění Pythagorovy věty pro tento pravoúhlý trojúhelník. Tu, jak víme, můžeme použít v každém pravoúhlém trojúhelníku. Tvrzení kosinové věty platí pro pravý úhel pravoúhlého trojúhelníku. Platí samozřejmě také pro oba jeho ostré úhly, což bychom dokázali stejně jako v ostroúhlém trojúhelníku. Proto kosinová věta platí i ve všech pravoúhlých trojúhelnících.⁴

Nyní dokážeme platnost kosinové věty v tupoúhlých trojúhelnících. Uvažujme libovolný tupoúhlý trojúhelník ABC s tupým úhlem u vrcholu A (viz obrázek č. 6). Pata P výšky v_c na stranu c leží na polopřímce \overrightarrow{BA} , přičemž bod P není bodem strany AB . Výška v_c vytváří dva pravoúhlé trojúhelníky APC a BPC , které mají oba pravý úhel u vrcholu P . Úhel PAC v trojúhelníku APC má velikost $\pi - \alpha$, protože úhly PAC a BAC jsou vedlejší. V trojúhelníku APC pro něj použijeme goniometrické funkce: platí

$$\cos(\pi - \alpha) = \frac{|AP|}{b},$$

a

⁴ Kosinová věta je vlastně zobecněná Pythagorova věta.

$$\sin(\pi - \alpha) = \frac{v_c}{b}.$$

Nyní upravím pomocí součtových vzorců levé strany obou rovností. Dostávám

$$\cos(\pi - \alpha) = \cos(\pi) \cdot \cos(\alpha) + \sin(\pi) \cdot \sin(\alpha) = -\cos(\alpha),$$

a dále

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\pi) \cdot \cos(\alpha) - \cos(\pi) \cdot \sin(\alpha) = \sin(\alpha),$$

protože je $\cos(\pi) = -1$ a $\sin(\pi) = 0$.

Proto lze rovnosti v trojúhelníku APC zapsat v jednodušším tvaru

$$-\cos(\alpha) = \frac{|AP|}{b},$$

a

$$\sin(\alpha) = \frac{v_c}{b}.$$

Z nich vyjádřím velikosti úseček $|AP| = -b \cdot \cos(\alpha)$ a $v_c = |CP| = b \cdot \sin(\alpha)$.

Navíc pro velikost úsečky PB platí $|PB| = |AP| + c$, což lze také zapsat ve tvaru

$$|PB| = -b \cdot \cos(\alpha) + c.$$

Protože v trojúhelníku BPC platí Pythagorova věta ve tvaru

$$a^2 = |CP|^2 + |PB|^2,$$

můžeme dosadit za sčítance na pravé straně a postupně upravovat:

$$\begin{aligned} a^2 &= (b \cdot \sin(\alpha))^2 + (c - b \cdot \cos(\alpha))^2 = b^2 \cdot \sin^2(\alpha) + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) + b^2 \cdot \\ &\cos^2(\alpha) = b^2 \cdot (\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)) + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \\ &\cos(\alpha). \end{aligned}$$

Tím je dokázáno, že rovnost

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) \quad (8)$$

platí pro tupý úhel v tupoúhlém trojúhelníku. Že rovnost platí i pro oba ostré úhly v tupoúhlém trojúhelníku, bychom dokázali zcela analogicky jako v důkazu kosinové věty pro ostroúhlý trojúhelník.

Rovnost uvedená v kosinové větě tedy platí ve všech typech trojúhelníků.

2 Aplikace

2.1 Coriolisova síla^[2]

Dynamika hmotného bodu

Kinematika popisuje pohyb, zatímco dynamika zkoumá příčiny pohybu. Dynamika rovněž poskytuje odpověď na otázku, jaký pohyb nastane při známých vnějších podmínkách. Základní zákony používané v klasické dynamice jsou Newtonovy pohybové zákony.

Inerciální a neinerciální soustava souřadná

Newtonovy pohybové zákony platí v inerciální soustavě souřadné. Na základě sledování pohybů těles a příčin těchto pohybů se za inerciální soustavu souřadnou pokládá souřadnicová soustava pevně spjatá se stálými tělesy. S určitou mírou zkrácení je možné považovat za inerciální i soustavu souřadnou spjatou se Zemí.

Oproti tomu v neinerciální soustavě souřadné neplatí rovnice

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a},$$

což je rovníkový zápis znění druhého Newtonova zákona. Pokud bychom chtěli použít tuto rovnici i v neinerciálních soustavách, museli bychom k ní přidat „síly“, které vykompenzují zrychlený pohyb neinerciální soustavy souřadné vůči soustavě inerciální. Tyto veličiny vysvětlují rozdíl mezi zrychlením

$$\vec{a}'$$

hmotného bodu vůči neinerciální soustavě souřadné a jeho zrychlením

$$\vec{a}$$

vůči inerciální soustavě souřadné. Vůči inerciální soustavě souřadné by takové „síly“ nevyvolávaly žádné zrychlení a nejsou tudíž ve fyzikálním slova smyslu silami. Nazýváme je proto zdánlivé síly.

Pohybová rovnice hmotného bodu

V okolí těles, v okolí elektricky nabitých částic a v řadě dalších případů lze stanovit silové působení, které při známém rozložení objektů a při udání dalších podmínek (např. zda lze

zanedbat okolní vlivy) je vždy stejné. Známe-li silové působení, můžeme dle druhého Newtonova zákona určit pohyb hmotného bodu v tomto silovém poli. Takový pohyb určíme řešením pohybové rovnice hmotného bodu.

Soustava otáčející se vůči inerciální s konstantní úhlovou rychlostí

Mějme dány souřadné soustavy 1 a 2 a předpokládejme, že se souřadná soustava 2 vůči inerciální soustavě 1 otáčí stálou úhlovou rychlostí ω . Budeme hledat zdánlivé síly, pomocí kterých sestavím pohybovou rovnici

$$\vec{F} = \vec{F}_p + \vec{F}_z = m \cdot \vec{a}.$$

Symbolem \vec{F}_p je označen součet pravých sil a \vec{F}_z je součet zdánlivých sil působících na hmotný bod. Síla pravá je síla zavedená jako veličina, která je úměrná zrychlení hmotného bodu vůči inerciální soustavě souřadné. Zdánlivé síly jsou síly, které vysvětlují rozdíl mezi zrychlením \vec{a} hmotného bodu vůči neinerciální soustavě souřadné a jeho zrychlením vůči inerciální soustavě souřadné.

Soustava souřadná 2 je neinerciální. Kartézské souřadnicové soustavy zavedeme tak, že jejich počátky a třetí osy budou splývat. Třetí osy leží v ose otáčení. Transformační rovnice pro vztah mezi souřadnicemi x_1, x_2, x_3 libovolného bodu v inerciální soustavě 1 a souřadnicemi x'_1, x'_2, x'_3 téhož bodu v neinerciální soustavě 2 jsou dány rovnicemi

$$x'_1 = x_1 \cdot \cos(\omega t) + x_2 \cdot \sin(\omega t)$$

$$x'_2 = -x_1 \cdot \sin(\omega t) + x_2 \cdot \cos(\omega t)$$

$$x'_3 = x_3 \quad (1)$$

Předpokládáme, že v čase $t = 0$ obě souřadnicové složky splývají. Uvedené transformační rovnice platí nejen pro souřadnice bodů, ale i pro složky libovolného vektoru \vec{c} . Má-li tento vektor v soustavě 1 složky (c_1, c_2, c_3) , jsou složky (c'_1, c'_2, c'_3) téhož vektoru v soustavě 2 dány výrazy

$$c'_1 = c_1 \cdot \cos(\omega t) + c_2 \cdot \sin(\omega t)$$

$$c'_2 = -c_1 \cdot \sin(\omega t) + c_2 \cdot \cos(\omega t)$$

$$c'_3 = c_3 \quad (2)$$

Mějme nyní hmotný bod, jehož pohyb vůči inerciální soustavě souřadné 1 je dán parametrickými rovnicemi $x_i = x_i(t)$. Parametrické rovnice $x_i', x_i'(t)$ pohybu tohoto bodu vůči neinerciální soustavě 2 dostaneme přímým dosazením parametrických rovnic $x_i = x_i(t)$ do transformačních rovnic (1). Složky vektoru $\vec{v}' = (v_1', v_2', v_3')$ bodu vůči neinerciální soustavě 2 získáme derivací

$$v_i'(t) = \frac{dx_i'}{dt}$$

soustavy rovnic (2). Poté s využitím soustavy rovnic (1) lze výrazy pro složky vektoru v_i přepsat na tvar

$$\begin{aligned} v_1' &= \left(\frac{dx_1}{dt}\right) \cos(\omega t) + \left(\frac{dx_2}{dt}\right) \sin(\omega t) + \omega x_2' \\ v_2' &= -\left(\frac{dx_1}{dt}\right) \sin(\omega t) + \left(\frac{dx_2}{dt}\right) \cos(\omega t) - \omega x_1' \\ v_3' &= \left(\frac{dx_3}{dt}\right) \quad (3) \end{aligned}$$

Derivací

$$\frac{dv_i'}{dt}$$

soustavy rovnic (3) získáme vztahy pro zrychlení a_i' bodu vůči neinerciální soustavě 2. Tyto výrazy dále upravíme s využitím vztahů

$$\begin{aligned} -\left(\frac{dx_1}{dt}\right) \omega \cdot \sin(\omega t) + \left(\frac{dx_2}{dt}\right) \omega \cdot \cos(\omega t) &= \omega(v_2' + \omega x_1') \\ -\left(\frac{dx_1}{dt}\right) \omega \cdot \cos(\omega t) - \left(\frac{dx_2}{dt}\right) \omega \cdot \sin(\omega t) &= -\omega(v_1' - \omega x_2') \end{aligned}$$

plynoucích z (3) na tvar

$$\begin{aligned} a_1' &= a_1 \cdot \cos(\omega t) + a_2 \cdot \sin(\omega t) + 2 \cdot \omega \cdot v_2' + \omega^2 \cdot x_1' \\ a_2' &= -a_1 \cdot \sin(\omega t) + a_2 \cdot \cos(\omega t) - 2 \cdot \omega \cdot v_1' + \omega^2 \cdot x_2' \\ a_3' &= a_3 \quad (4) \end{aligned}$$

V soustavě rovnic (4) jsem složky zrychlení

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2}$$

hmotného bodu vůči inerciální soustavě souřadné 1 označil symbolem a_i a složky rychlosti

$$\frac{dx_i'}{dt}$$

hmotného bodu vůči neinerciální soustavě souřadné 2 symbolem v_i' . Pokud vynásobíme rovnice (4) hmotností m hmotného bodu, dostaneme pro složky síly $F_i' = m \cdot a_i'$, pomocí které vysvětlíme pohyb hmotného bodu vůči neinerciální soustavě souřadné 2, vyjádření

$$F_1' = F_1^p \cdot \cos(\omega t) + F_2^p \cdot \sin(\omega t) + F_1^C + F_1^O$$

$$F_2' = -F_1^p \cdot \sin(\omega t) + F_2^p \cdot \cos(\omega t) + F_2^C + F_2^O$$

$$F_3' = F_3^p \quad (5)$$

V soustavě rovnic (5) jsou $F_i^p = m \cdot a_i$ složky výsledné pravé síly (tj. součtu všech sil fyzikálního charakteru), která působí na hmotný bod. Zrychlení a_i je zrychlení vůči inerciální soustavě souřadné 1. První část rovnic (7) představuje prostou geometrickou transformaci složek pravé síly do neinerciální soustavy souřadné 2 dle transformačních rovnic (2). Kdyby žádná pravá síla

$$F_i^p$$

na hmotný bod nepůsobila, byly by nulové i její složky

$$F_1^{p'} = F_1^p \cdot \cos(\omega t) + F_2^p \cdot \sin(\omega t)$$

$$F_2^{p'} = -F_1^p \cdot \sin(\omega t) + F_2^p \cdot \cos(\omega t)$$

$$F_3^{p'} = F_3^p$$

v neinerciální soustavě souřadné. Výrazy

$$F_1^C = 2 \cdot m \cdot \omega \cdot v_2', F_2^C = -2 \cdot m \cdot \omega \cdot v_1', F_1^O = m \cdot \omega^2 \cdot x_1' \text{ a } F_2^O = m \cdot \omega^2 \cdot x_2'$$

jsou složkami dvou zdánlivých sil $\vec{F}^C(F_1^C, F_2^C, 0)$ a $\vec{F}^O(F_1^O, F_2^O, 0)$, které musíme přidat k pravé síle, abychom vysvětlili pohyb hmotného bodu vůči neinerciální soustavě souřadné

2. V takovém případě jev této soustavě zachována platnost rovnice formálně shodné s rovnicí vyjadřující zákon síly

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}.$$

V rovnici $\vec{F}' = m \cdot \vec{a}'$ pro pohyb hmotného bodu v soustavě souřadné, která se otáčí konstantní rychlostí vůči inerciální soustavě souřadné, se tedy síla \vec{F}' skládá z pravé síly \vec{F}^P a dvou zdánlivých sil \vec{F}^C a \vec{F}^O . Pro tyto síly platí vztah $\vec{F}' = \vec{F}^P + \vec{F}^C + \vec{F}^O$. Síla

$$\vec{F}^C(2 \cdot m \cdot \omega \cdot v_2', -2 \cdot m \cdot \omega \cdot v_1', 0)$$

se nazývá Coriolisova síla a síla

$$\vec{F}^O(m \cdot \omega^2 \cdot x_1, m \cdot \omega^2 \cdot x_2, 0)$$

je síla odstředivá.

Síla odstředivá působí na všechny hmotné body neinerciální soustavy 2 kromě bodů ležících na ose otáčení $x_1' = x_2' = 0$. Její velikost je

$$|\vec{F}^O| = F^O = m \cdot \omega^2 \cdot R,$$

kde R je vzdálenost působíště síly od osy otáčení. Odstředivá síla je zdánlivá síla, která působí v neinerciální soustavě souřadné, která se rovnoměrně otáčí vůči inerciální soustavě souřadné.

Coriolisova síla působí pouze na hmotné body, které se vůči neinerciální soustavě 2 pohybují nenulovou rychlostí \vec{v}' , jejíž směr není shodný se směrem osy otáčení. Výraz pro Coriolisovu sílu lze zapsat ve tvaru vektorového součinu

$$\vec{F}^C = 2 \cdot m \cdot (\vec{v}' \times \vec{\omega}),$$

kde $\vec{\omega}$ je vektor, jehož velikost je rovna velikosti úhlové rychlosti otáčení ω , směr je totožný se směrem otáčení a orientace je taková, že při pohledu v jejím smyslu se otáčení soustavy 2 vůči soustavě 1 děje ve smyslu oběhu hodinových ručiček.

Zadání^[3]

Na 45° zeměpisné šířky dopadá na zemský povrch rychlostí $v = 100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ těleso o hmotnosti $m = 10 \text{ kg}$. Určete velikost setrvačné odstředivé a Coriolisovy síly, které na toto těleso působí při dopadu na zemský povrch.

Řešení

Velikost setrvačné odstředivé síly zjistíme ze vztahu

$$F_O = m \cdot r \cdot \omega^2 = m \cdot (R \cdot \cos(\psi)) \cdot \omega^2.$$

Velikost Coriolisovy síly je rovna

$$F_C = 2 \cdot m \cdot |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}| = 2 \cdot m \cdot \left[\omega \cdot v \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right) \right] = 2 \cdot m \cdot \omega \cdot v \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(\psi) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin(\psi) \right) = 2 \cdot m \cdot \omega \cdot v \cdot \sin(\psi).$$

Protože je

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

a $T = 86400 \text{ s}$ je počet vteřin ekvivalentní časovému úseku 24 hodin, a protože je poloměr zeměkoule přibližně roven 6378 km , jsou přibližné hodnoty těchto sil $F_O = 0,239 \text{ N}$ a $F_C = 0,103 \text{ N}$.

V daném případě má tedy odstředivá síla velikost zhruba 0,2% tíže tělesa a Coriolisova síla přibližně 0,1% tíže tělesa. Tuto rychlost u zemského povrchu dosahují tělesa padající volným pádem z výšky asi 500 metrů. Z toho je zřejmé, že když při zkoumání pohybu těles na zemském povrchu zanedbáváme setrvačné síly, dopouštíme se chyby ve většině případů nepatrné.

2.2 Nakloněná rovina^[4]

Zadání.

Těleso se pohybuje působením tíhové síly po nakloněné rovině o elevačním úhlu α z bodu A do bodu B . Určete rychlost tělesa v bodě B , je-li $|AB| = s$, součinitel tření $f = \operatorname{tg}(\psi)$ a rychlost tělesa v bodě A je nulová.

Řešení.

Pohyb tělesa po nakloněné rovině je možný jen pro $\alpha > \psi$. Ve směru pohybu působí na těleso tíhová síla F_1 a třecí síla F_2 :

$$F_1 = m \cdot g \cdot \sin(\alpha),$$

$$F_2 = -m \cdot g \cdot \cos(\alpha) \cdot \operatorname{tg}(\psi).$$

Pohybová rovnice tělesa má tedy tvar

$$m \frac{dv}{dt} = m \cdot g \cdot \sin(\alpha) - m \cdot g \cdot \cos(\alpha) \cdot \operatorname{tg}(\psi). \quad (1)$$

Aby pohyb nastal a pak vytrval, musí být pravá strana rovnice (1) kladná. To znamená, že musí být

$$\sin(\alpha) > \cos(\alpha) \cdot \operatorname{tg}(\psi),$$

čili po úpravě

$$\operatorname{tg}(\alpha) > \operatorname{tg}(\psi)$$

a odtud plyne podmínka $\alpha > \psi$, protože funkce tangens je rostoucí na intervalu

$$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Rovnici (1) upravím do tvaru

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\sin(\alpha - \psi)}{\cos(\psi)} \cdot g.$$

Při úpravách byl použit součtový vzorec (ii) z Věty – součtové vzorce.

Získal jsem homogenní diferenciální rovnici prvního řádu, kterou vyřeším metodou separace proměnných a integrací a zjistím tak závislost rychlosti tělesa na čase:

$$v = \frac{\sin(\alpha - \psi)}{\cos(\psi)} \cdot g \cdot t + C.$$

Pro $t = 0$ je $v = v_A$, proto je konstanta $C = v_A$.

Označím-li symbolem x dráhu, kterou těleso za daných podmínek urazí, dostaneme s využitím vztahu

$$v = \frac{dx}{dt}$$

další homogenní diferenciální rovnici prvního řádu

$$dx = \left(\frac{\sin(\alpha - \psi)}{\cos(\psi)} \cdot g \cdot t + v_A \right) dt.$$

Po zitegrování obou stran rovnosti najdu vztah pro dráhu

$$x = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{\sin(\alpha - \psi)}{\cos(\psi)} \cdot t^2 + v_A \cdot t + x_A,$$

přičemž velikost konstanty plyne z toho, že je opět $t = 0$.

Podle zadání je $x_A = 0(m)$, $v_A = 0(m \cdot s^{-1})$, $x_B = |AB| = s$. Odtud a s využitím vztahů

$$x = \frac{g \cdot t^2}{2 \cdot \cos(\psi)} \cdot \sin(\alpha - \psi), \text{ a}$$

$$v = \frac{\sin(\alpha - \psi)}{\cos(\psi)} \cdot g \cdot t$$

dostávám po vyjádření závislosti t na v a po jejím dosazení do prvního vztahu dalších úpravách výsledný vztah

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot s \cdot \sin(\alpha - \psi)}{\cos(\psi)}}.$$

2.3 Matematické kyvadlo^[5]

Matematickým kyvadlem rozumíme hmotný bod (kuličku) o hmotnosti m zavěšený na vlákně délky l . Úkolem je popsat úhlovou odchylku ψ kuličky od její rovnovážné polohy pomocí funkce $\psi(t)$ v závislosti na čase. Pro zjednodušení předpokládáme pouze malé odchylky a zanedbáváme odpor prostředí působící na kuličku.

Na kuličku působí gravitační tíha \vec{F}_G , jejíž směrový vektor je vždy kolmý k povrchu země. Trajektorie pohybující se kuličky je část kružnice. Gravitační sílu lze rozložit na dvě kolmé složky (které lze doplnit na rovnoběžník, jehož jednou úhlopříčkou je \vec{F}_G), z nichž jedna je část tečny v bodě křivky $\vec{F}_{G(t)}$, ve kterém se v daném okamžiku kulička nachází, a druhá složka je síla $\vec{F}_{G(n)}$, která je kolmá na $\vec{F}_{G(t)}$. Síly $\vec{F}_{G(n)}$ a \vec{F}_G svírají úhel velikosti ψ . Proto lze vyjádřit $\vec{F}_{G(t)} = -m \cdot g \cdot \sin(\psi)$. Dále vyjádřím délku části kružnice s odpovídající úhlu ψ , kterou pro malé úhly přibližně spočítám podle vzorce $s = l \cdot \psi$. Proto také platí $s'' = l \cdot \psi''$.

Podle 2. Newtonova zákona je $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$. To znamená, že je $m \cdot s'' = -m \cdot g \cdot \sin(\psi)$. S využitím toho, že pro malé úhly je $\sin(\psi) \doteq \psi$, a po vydělení rovnosti m a dosazení za s'' dostáváme $l \cdot \psi'' = -g \cdot \psi$, což je homogenní diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty a s neznámou ψ . Vyjádřím ji ve tvaru

$$\psi'' + \frac{g}{l} \cdot \psi = 0$$

a zapíšu její charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 + \frac{g}{l} = 0,$$

Jejíž neznámou je λ . Kořeny této rovnice jsou komplexně sdružená čísla

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} i \text{ a } \lambda_2 = -\sqrt{\frac{g}{l}} i.$$

Obecné řešení diferenciální rovnice má proto tvar

$$\psi(t) = c_1 \cdot e^{(a+bi)t} + c_2 \cdot e^{(a-bi)t},$$

přičemž v tomto případě je $a = 0$ a

$$b = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Pro úpravu tohoto obecného řešení využijí Eulerův vzorec

$$e^{i\psi} = \cos(\psi) + i \sin(\psi).$$

Vyjádřím

$$\begin{aligned} \psi(t) &= c_1 \cdot e^{(a+bi)t} + c_2 \cdot e^{(a-bi)t} = \\ &= c_1 \cdot e^{at} \cdot (\cos(bt) + i \sin(bt)) + c_2 \cdot e^{at} \cdot (\cos(-bt) + i \sin(-bt)) = \\ &= C_1 \cdot \cos(bt) + (C_2 \cdot \sin(bt)) i \end{aligned}$$

s využitím Eulerova vzorce pro $\psi = bt$ a pro $\psi = -bt$ a při označení $C_1 := c_1 + c_2$ a $C_2 := c_1 - c_2$. Protože je reálná část kořenů charakteristické rovnice rovna nule, je výraz e^{at} roven jedné, což je neutrální prvek vzhledem k násobení. Pokud nyní dosadím za

$$b = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

dostávám hledanou funkci ve tvaru

$$\psi(t) = C_1 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) + \left(C_2 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)\right) i.$$

2.4 Křivočaré rovnoměrné pohyby^[2]

Jsou to pohyby, které se nekonají po přímce, ale velikost rychlosti při nich zůstává stejná. Nejznámějším pohybem tohoto druhu je rovnoměrný pohyb po kružnici, kterému říkáme rovnoměrný kruhový pohyb.

Rovnoměrný kruhový pohyb

Trajektorie tohoto pohybu je popsána parametrickými rovnicemi

$$x_1 = R \cdot \cos(\omega t + \alpha) + x_{1,0}$$

$$x_2 = R \cdot \sin(\omega t + \alpha) + x_{2,0}$$

Veličiny $R > 0$, ω , α , $x_{1,0}$, $x_{2,0}$ jsou konstanty. Z těchto rovnic převedením konstant $x_{1,0}$, $x_{2,0}$ na levou stranu, následným umocněním obou rovnic na druhou a jejich sečtením zjistíme, že drahou takového pohybu je kružnice o středu $S[x_{1,0}, x_{2,0}]$ a poloměru R . Fázová konstanta (počáteční fáze) určuje polohu bodu v čase $t = 0$.

Rychlost \vec{v} pohybu určíme derivováním parametrických rovnic:

$$v_1 = -R \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \alpha)$$

$$v_2 = R \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \alpha) .$$

Velikost rychlosti je dána vztahem

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = R \cdot |\omega|.$$

Vyplývá z něj, že velikost rychlosti v je konstantní, což odpovídá skutečnosti, že tento pohyb je rovnoměrný. Úhlová rychlost je v absolutní hodnotě proto, že velikost vektoru \vec{v} je vždy kladná.

Zrychlení \vec{a} rovnoměrného kruhového pohybu zjistíme derivací složek vektoru rychlosti. Dostaneme

$$a_1 = -R \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t + \alpha)$$

$$a_2 = -R \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \alpha).$$

Nerovnoměrný pohyb po kružnici

Obecný pohyb po kružnici, která má střed v počátku soustavy souřadnic, je popsán parametrickými rovnicemi

$$x_1 = R \cdot \cos(\psi(t))$$

$$x_2 = R \cdot \sin(\psi(t)),$$

kde R je konstanta a $\psi(t)$ je libovolná funkce času t . Umocněním obou rovnic na druhou a jejich sečtením dostaneme rovnici dráhy

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2. \quad (9)$$

Drahou tohoto pohybu je tedy kružnice o poloměru R . Funkce $\psi(t)$ udává, jak rychle bod po kružnici obíhá. Složky rychlosti \vec{v} tohoto pohybu zjistíme výpočtem první derivace parametrických rovnic:

$$v_1 = -R \frac{d(\psi(t))}{dt} \cdot \sin(\psi(t))$$

$$v_2 = R \frac{d(\psi(t))}{dt} \cdot \cos(\psi(t)). \quad (3)$$

Velikost takto popsané rychlosti je

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = R \left| \frac{d\psi}{dt} \right|$$

je konstantní pouze tehdy, když je výraz

$$\frac{d\psi}{dt}$$

udávající úhlovou rychlost ω pohybu konstantní; tuto konstantu označíme k . Z podmínky

$$\frac{d\psi}{dt} = k$$

dostaneme po jejím zintegrování

$$\psi = k \cdot t + k_1.$$

Pohyb je tedy rovnoměrný, jen když je úhel ψ lineární funkcí času.

Drahou obecného pohybu po kružnici nemusí být celá kružnice (9), ale jen její část. Typickým příkladem takového pohybu je pohyb, který koná koncový bod matematického kyvadla.

Pohyb, při kterém hmotný bod obíhá celou kružnici, je nazýván nerovnoměrný kruhový pohyb. Složky vektoru zrychlení \vec{a} nerovnoměrného kruhového pohybu dostaneme zderivováním rovnic pro výpočet rychlosti (3) podle času t :

$$a_1 = -R \frac{d^2\psi}{dt^2} \cdot \sin(\psi(t)) - R \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \cdot \cos(\psi(t))$$

$$a_2 = R \frac{d^2\psi}{dt^2} \cdot \cos(\psi(t)) - R \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \cdot \sin(\psi(t)).$$

2.5 Elektromagnetické vlny a kmity^[3]

Vznik střídavého indukovaného elektromagnetického napětí si obvykle vysvětlujeme na jednoduchém zařízení, ve kterém má vodič tvar obdélníka o obsahu S a otáčí se konstantní úhlovou rychlostí ω v magnetickém poli s indukcí B okolo osy spojující středy protilehlých stran. Osa rotace je kolmá na směr magnetické indukce B i na osu cívky. Pro okamžitou hodnotu střídavého elektromotorického napětí U , indukovaného v tomto obdélníkovém rámu, platí vztah

$$U = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t),$$

kde ω je úhlová rychlost rotujícího rámu (a také kruhová frekvence indukovaného elektromagnetického napětí) a U_0 je maximální hodnota EMN. Ta je dána vztahem

$$U_0 = \Phi \cdot \omega,$$

kde Φ značí maximální hodnotu magnetického indukčního toku procházejícího plochou rámu, takže je

$$\Phi = B \cdot S.$$

Okamžitá hodnota proudu I vyvolaného ve vodiči střídavým elektromotorickým napětím je dána vztahem

$$I = I_0 \cdot \sin(\omega - \psi),$$

kde ψ je fázové posunutí mezi napětím a proudem (jehož hodnota závisí na druhu spotřebiče).

Výkon P střídavého harmonického proudu je dán vztahem

$$P = U \cdot I \cdot \cos(\psi),$$

kde U je efektivní hodnota napětí na koncích vodiče, I je efektivní hodnota proudu procházejícího vodičem a $\cos(\psi)$ je tzv. účinník spotřebiče.

Pro výkon trojfázového proudu platí vztah

$$P = \sqrt{3} \cdot U_Z \cdot I_Z \cdot \cos(\psi),$$

kde U_Z a I_Z jsou sdružené (efektivní) hodnoty napětí a proudu a $\cos(\psi)$ je účinník spotřebiče. Tento vzorec platí bez ohledu na způsob zapojení spotřebiče.

Protože okamžitou hodnotu elektromotorického napětí

$$U = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

můžeme nahradit komplexním výrazem

$$U^* = U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) + U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot i$$

a zobrazit ji v komplexní rovině, je možné zobrazit okamžitou hodnotu elektromagnetického napětí jako rotující vektor. Takto lze zobrazit všechny harmonicky se měnící veličiny. Harmonicky se měnící veličiny nyní znázorníme graficky: Mějme střídavý proud

$$I = I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi).$$

Jeho velikost znázorníme vektorem, který má konstantní velikost I_0 . Ten svírá v čase $t = 0$ s vodorovnou osou úhel o velikosti ψ , který znázorňuje fázové posunutí, a rotuje kolem osy ω kolem souřadnicové osy y . Okamžitá hodnota proudu odpovídá velikosti kolmého průmětu tohoto vektoru na osu y . Okamžitá hodnota napětí

$$U = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

se zobrazí v čase $t = 0$ jako vektor u_0 , který se zobrazí jako úsečka konstantní velikosti, která je částí osy x a má počátek O .

Mějme střídavé napětí

$$U = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t),$$

které je vynucené v sériovém okruhu charakterizovaném ohmickým odporem R , indukčností L a kapacitou C . Tímto okruhem protéká proud I_0 , jehož maximální hodnota je

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}},$$

přičemž proud je vzhledem k napětí fázově opožděný o fázový úhel ψ . Jeho velikost zjistíme ze vztahu

$$\psi = \arctg\left(\frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R}\right).$$

Okamžitá hodnota proudu protékajícího tímto okruhem je dána vztahem

$$I = I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t - \psi) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}} \cdot \sin(\omega \cdot t - \psi) = \frac{U_0}{Z} \cdot \sin(\omega \cdot t - \psi).$$

Veličina

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}$$

se nazývá zdánlivý odpor čili impedance. Pokud je v okruhu pouze ohmický odpor R (tedy je $L = 0$, $C \rightarrow \infty$), tak je $Z = R$, $\psi = 0$,

$$I = \frac{U_0}{R} \cdot \sin(\omega \cdot t).$$

Pokud je v okruhu pouze indukčnost L (čili je $R = 0$ a $C \rightarrow \infty$), tak je $Z = \omega \cdot L$, $\psi = \frac{\pi}{2}$,

$$I = \frac{U_0}{\omega \cdot L} \cdot \sin(\omega \cdot t - \psi).$$

Pokud je v okruhu jen kapacita C (čili je $R = 0$, $L = 0$), tak je $Z = \frac{1}{\omega \cdot C}$, $\psi = -\frac{\pi}{2}$,

$$I = U_0 \cdot \omega \cdot C \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi).$$

Příklad.

Vypočítejte, jaký je poměr energie magnetického pole oscilačního okruhu a energie jeho elektrického pole v čase $t = \frac{T}{8}s$, jestliže T označuje periodu oscilací.

Řešení.

Pro napětí na kondenzátoru oscilačního okruhu platí vztah

$$U = U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t).$$

Velikost náboje na elektrodách kondenzátoru, který má kapacitu C , vyjádříme pomocí

$$\text{napětí } Q = C \cdot U,$$

odkud plyne vztah

$$dQ = C \cdot dU.$$

Navíc je

$$dQ = I \cdot dt,$$

takže můžeme psát

$$I \cdot dt = C \cdot dU,$$

což je ekvivalentní

$$I = C \frac{dU}{dt}.$$

Po zderivování pravé strany vzorce pro napětí na kondenzátoru dostáváme

$$I = -C \cdot U_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t).$$

Energie magnetického pole je dána vztahem

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2,$$

a po dosazení za I je

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot L \cdot C^2 \cdot U_0 \cdot \omega^2 \cdot \sin^2(\omega t).$$

Velikost energie elektrického pole zjistíme ze vzorce

$$W_e = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2,$$

což s využitím vzorce pro U dává

$$W_e = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_0^2 \cdot \cos^2(\omega t).$$

Poměr energií magnetického a elektrického pole oscilačního okruhu tedy je

$$\frac{W_m}{W_e} = L \cdot C \cdot \omega^2 \cdot \operatorname{tg}^2(\omega t).$$

Navíc však můžeme vyjádřit

$$\operatorname{tg}(\omega t) = \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{8}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Jestliže je ohmický odpor okruhu tak malý, že platí

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 \ll \frac{1}{LC},$$

počítáme periodu kmitů podle vztahu

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}.$$

Odtud plyne vyjádření

$$L \cdot C = \left(\frac{T}{2 \cdot \pi}\right)^2 = \frac{1}{\omega^2}.$$

Proto lze poměr energií dále zjednodušit na tvar

$$\frac{W_m}{W_e} = 1.$$

2.6 Volné harmonické kmity^[6]

Hmotný bod nebo těleso, které se pohybuje po přímé dráze tak, že jeho pohyb lze popsat rovnicí

$$y = A \cdot \sin(\omega t), (1)$$

nebo méně často

$$x = A \cdot \cos(\omega t),$$

koná harmonické kmity (harmonické oscilace). Veličina A se nazývá amplituda harmonického pohybu a je veličinou nezápornou. Veličina ω je úhlová rychlost; v souvislosti s kmity však ztrácí význam rychlosti a nazývá se úhlový kmitočet či úhlová frekvence. Její jednotou je

$$[\omega] = s^{-1}.$$

Grafickým zobrazením rovnice (1) je sinusoida. Vzdálenost hmotného bodu (tělesa) od počátku v určitém čase t se nazývá výchylka (elongace). Poloha $y = 0$ se nazývá rovnovážná poloha. Sinus (a kosinus) může dosáhnout hodnoty nejvýše 1, a proto je největší výchylka y_{max} určena hodnotou veličiny A .

Zadání.^[5]

Volné (netlumené) harmonické kmity lze popsat pomocí diferenciální rovnice

$$y^{(2)} + a^2 \cdot y = 0,$$

kde $a > 0$ a y vyjadřuje okamžitou výchylku kmitajícího tělesa (hmotného bodu).

Tuto rovnici lze také zapsat ve tvaru

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a^2 \cdot y = 0, (1)$$

kde $a > 0$ je konstanta a y je neznámá. Rovnice (1) popisuje přímočarý netlumený kmitavý pohyb. Tuto rovnici vyřeším. Je

$$\frac{dy'}{dx} = -a^2 \cdot y,$$

a když do této rovnice dosadím vztah

$$dx = \frac{dy}{y'},$$

dostanu

$$y' dy' = -a^2 \cdot y dy.$$

To je nehomogenní diferenciální rovnice 1. řádu, kterou vyřeším zintegrováním jejích obou stran a dostanu

$$y' = \pm \sqrt{-a^2 \cdot y^2 + c_1} = \frac{dy}{dx}.$$

Odtud vyjádřím dx a dostanu nehomogenní diferenciální rovnici 2. řádu (2), kterou opět vyřeším integrací. Nyní je nutné vypočítat neurčitý integrál s neznámou y :

$$\int \frac{1}{\sqrt{c_1 - a^2 \cdot y^2}} dy,$$

který nejprve vytknutím a^2

a pak vytknutím $\frac{c_1}{a^2}$

převeďme neurčitý integrál do tvaru

$$\frac{1}{\sqrt{c_1}} \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{\frac{\sqrt{c_1}}{a}}\right)^2}} dy,$$

který vyřeším substitucí

$$t = \frac{y}{\frac{\sqrt{c_1}}{a}}$$

$$dt = \frac{a}{\sqrt{c_1}} dy.$$

Odtud plyne tvar

$$\frac{1}{a} \int \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt.$$

Vzniklý neurčitý integrál je tabulkový integrál. Po dosazení původní proměnné za proměnnou t dostávám řešení diferenciální rovnice (2) ve tvaru

$$x + c_2 = \frac{1}{a} \cdot \arcsin\left(\frac{y}{\frac{\sqrt{c_1}}{a}}\right).$$

Po vynásobení této rovnosti a a po složení obou stran s funkcí sinus (což je funkce inverzní k arkussinu) vyjádřím neznámou

$$y = \frac{\sqrt{c_1}}{a} \cdot \sin(ax + ac_2). \quad (2)$$

Po zavedení nových konstant C_1 , C_2 lze pravou stranu rovnice (2) zapsat alternativně ve tvaru

$$y = C_1 \cdot \sin(ax) + C_2 \cdot \cos(ax).$$

2.7 Určování polohy Slunce^[7]

Při oběhu Země kolem Slunce je rovina rovníku odkloněná od roviny oběžné dráhy o $23,45^\circ$, což způsobuje, že se poloha Slunce vůči pozorovateli na zemském povrchu během roku neustále mění. Tuto změnu vyjadřujeme pomocí deklinace Slunce δ . Deklinace Slunce je úhel, který svírá sluneční paprsek s rovinou rovníku. Přesné hodnoty úhlu δ lze najít např. v hvězdářských ročenkách. Pro výpočty ozáření budov Sluncem je možné dostatečně přesně určit deklinaci Slunce ze vztahu

$$\delta = 23,45^\circ \cdot \sin(t - 109^\circ),$$

kde t určíme ze vztahu

$$t = 0,98^\circ \cdot D + 29,7^\circ \cdot M.$$

Symbol D označuje pořadové číslo dne v kalendářním měsíci a M je pořadové číslo měsíce v roce.

Výška Slunce

Výška Slunce h je určena polohou Slunce vzhledem k horizontální rovině v daném místě. Geografickou polohu místa, na kterém se nacházíme, určíme jeho zeměpisnou šířkou ψ , tj.

úhlem, který svírá zenitová přímka s rovinou rovníku. Při odvozování obecného vzorce pro výpočet výšky Slunce v libovolném místě a čase vycházíme ze sférického trojúhelníku, ve kterém použijeme modifikovanou kosinovou větu a dostaneme

$$\sin(h) = \sin(\psi) \cdot \sin(\delta) + \cos(\psi) \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(\tau).$$

Speciálně přesně v poledne, když je $\tau = 0$, má tento vztah tvar

$$h = 90^\circ - \psi + \delta.$$

Při východu a západu Slunce je $h = 0$ a platí

$$\tau = -\arccos(-\operatorname{tg}(\psi) \operatorname{tg}(\delta))$$

při východu Slunce a

$$\tau = \arccos(-\operatorname{tg}(\psi) \operatorname{tg}(\delta))$$

při jeho západu. Délku stínu t , který vytváří Slunce na vodorovnou rovinu ozáření tělesa o výšce v stojícího kolmo k Zemi, vyjádříme pomocí výšky Slunce nad obzorem

$$t = \frac{v}{\operatorname{tg}(h)}.$$

Azimut Slunce

Polohu Slunce vůči horizontální rovině můžeme také popsat pomocí druhé souřadnice, kterou je azimut Slunce A . Je to úhel, který svírá průmět slunečního paprsku na horizontální rovinu v místě pozorovatele s jižním směrem. Azimut Slunce nacházejícího se na východě (v dopoledních hodinách) má záporné znaménko; pokud je Slunce na západě, má azimut kladné znaménko. Při určování azimutu Slunce z jižních směrů v intervalu úhlů od 0° do $\pm 180^\circ$ se používá goniometrická funkce kosinus, přičemž při vyjádření A pomocí funkce k ní inverzní musí mít A stejné znaménko jako příslušný hodinový úhel Slunce τ (to ošetřím pomocí funkce signum)

$$A = \operatorname{sign}(\tau) \arccos(A).$$

Použitím kosinové věty ve sférickém trojúhelníku odvodíme vztah pro výpočet azimutu Slunce v obecném tvaru

$$\cos(A) = \frac{\operatorname{tg}(\psi)}{\cos(h)} \cdot \left(\sin(h) - \frac{\sin(\delta)}{\sin(\psi)} \right).$$

Z tohoto vztahu určíme azimut při východu a západu Slunce:

$$A = -\arccos\left(-\frac{\sin(\delta)}{\cos(\psi)}\right)$$

při východu;

$$A = \arccos\left(-\frac{\sin(\delta)}{\cos(\psi)}\right)$$

při západu Slunce.

Při sledování časové změny doby insolace budov zjišťujeme závislost mezi skutečným slunečním časem (SSČ) a azimutem Slunce v daném místě a ročním období. Ta vyplývá ze vztahu

$$SSČ = 12 + \frac{1}{15^\circ} \cdot \operatorname{sign}(A) \arccos(\tau),$$

kde

$$\cos(\tau) = \frac{\sin^2(A) \cdot \operatorname{tg}(\psi) \cdot \operatorname{tg}(\delta) + \frac{\cos(A)}{\cos(\psi)} \cdot \sqrt{\frac{\cos^2(A)}{\cos^2(\delta)} + \operatorname{tg}^2(\psi) - \operatorname{tg}^2(\delta)}}{\cos^2(A) + \operatorname{tg}^2(\psi)}.$$

Úhel dopadu

Úhel dopadu α je úhel, který svírá sluneční paprsek dopadající na rovinu s její normálou. Polohu této roviny udává sklon a orientace roviny vůči světovým stranám. Sklon roviny γ je úhel, který na vnitřní straně svírá její spádová přímka s vodorovnou hodinou. Orientaci roviny vyjadřuje azimutový odklon horizontálního průmětu její normály od jižního směru. Pro azimut normály A_n platí stejná znaménková konvence jako pro A ; je tedy směrem na východ záporné a směrem na západ kladné.

Nyní můžeme s využitím vztahů sférické trigonometrie odvodit vztah pro úhel dopadu slunečních paprsků na obecnou rovinu:

$$\cos(\alpha) = \cos(\gamma) \cdot \sin(h) + \sin(\gamma) \cdot \cos(h) \cdot \cos(A - A_n).$$

Je-li rovina vodorovná, je $\gamma = 0$ a platí $\cos(\alpha) = \sin(h)$.

Pro svislou rovinu $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$ máme

$$\cos(\alpha) = \cos(h) \cdot \cos(A - A_n).$$

Rozdíl azimutů Slunce a normály roviny vyjadřuje transformovaný azimut Slunce vyjádřený od normály roviny a označuje se symbolem A . Azimutový rozdíl A má kladnou hodnotu, jestliže sluneční paprsky dopadají na danou rovinu zleva, a zápornou hodnotu, pokud paprsky dopadají zprava od normály.

Elevační úhly slunečního paprsku

Hlavní elevační úhel slunečního paprsku α je úhel, který svírá vodorovná rovina s průmětem slunečního paprsku na svislou rovinu kolmou na danou rovinu. Vedlejší elevační úhel slunečního paprsku β je úhel, který svírá vodorovná rovina s průmětem slunečního paprsku na svislou rovinu stejné orientace jako posuzovaná rovina. K odvození vztahu pro jejich výpočet použijeme odkud dostaneme

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\operatorname{tg}(h)}{\cos(A - A_n)}, \quad (1)$$

resp.

$$\operatorname{tg}(\beta) = \frac{\operatorname{tg}(h)}{\sin(A - A_n)}. \quad (2)$$

Elevační úhly využít i pro určování souřadnic x_t , y_t stínu na nakloněné rovině od bodu P , který je k rovině v kolmé vzdálenosti d :

$$x_t = d \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\operatorname{tg}(\beta) \cdot \sin(\alpha + \gamma)},$$

$$y_t = d \cdot \operatorname{tg}\left(\alpha + \gamma - \frac{\pi}{2}\right).$$

Protože podle (1) a (2) není možné přímo sledovat denní průběh α a β v závislosti na čase, uvedeme jiné vyjádření elevačních úhlů slunečního paprsku:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\cos(\tau) \cdot \cos(\psi) + \sin(\psi) \cdot \operatorname{tg}(\delta)}{\sin(A_n) \cdot \sin(\tau) + \cos(A_n) \cdot (\cos(\tau) \cdot \sin(\psi) - \cos(\psi) \cdot \operatorname{tg}(\delta))},$$

$$\operatorname{tg}(\beta) = \frac{\cos(\tau) \cdot \cos(\psi) + \sin(\psi) \cdot \operatorname{tg}(\delta)}{\cos(A_n) \cdot \sin(\tau) - \sin(A_n) \cdot (\cos(\tau) \cdot \sin(\psi) - \cos(\psi) \cdot \operatorname{tg}(\delta))}.$$

2.8 Pohyb planet v polární souřadnicové soustavě^[8]

Dráhy planet okolo Slunce jsou elipsy, v jejichž jednom pomyslném ohnisku je Slunce. Tyto elipsy mají dost podobný tvar jako kružnice: rozdíl vzdáleností Země od Slunce v nejbližším bodě (tzv. periheliu) a v nejvzdálenějším bodě (tzv. afeliu) je u Slunce jen přibližně 4%.

Necht' je dána soustava souřadnic Oxy a v nich je umístěn bod P . Jeho polohu v polárních souřadnicích vyjádříme pomocí vzdálenosti ρ tohoto bodu od počátku O a pomocí úhlu ψ , který svírá polopřímka \overrightarrow{OP} se souřadnicovou osou x . [1] Má-li bod P souřadnice $[x; y]$, pak jeho vzdálenost od počátku vyjádříme pomocí vztahu

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

a úhel ψ lze pomocí těchto souřadnic vyjádřit jako

$$\operatorname{tg}(\psi) = \frac{y}{x}.$$

To znamená, že jeho velikost lze vyjádřit jako

$$\psi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right),$$

pokud je $x > 0$, a jako

$$\psi = \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right),$$

pokud je $x < 0$.

Pokud je $x = 0$, pak je úhel

$$\psi = \frac{\pi}{2}$$

pro $y > 0$, a

$$\psi = -\frac{\pi}{2}$$

pro $y < 0$. Úhel ψ není definován pro počátek $O[0; 0]$. Vztah mezi polární soustavou ρ, ψ a kartézskou soustavou udávají rovnice

$$x = \rho \cdot \cos(\psi)$$

$$y = \rho \cdot \sin(\psi),$$

kde $\rho \geq 0, 0 \leq \psi \leq 2\pi$.

Nyní odvodíme rovnice elipsy v polárních souřadnicích ρ, ψ . Počátek soustavy souřadnic Oxy umístíme do bodu $O[e; 0]$, který je současně jedním ohniskem elipsy. Druhá elipsa má ohnisko v bodě $F_1[-e; 0]$, bod P má souřadnice $[x; y]$. Vzdálenost bodu P od ohniska F_1 označme ρ_1 , vzdálenost bodu P od ohniska O označme ρ_2 . Polopřímka \overrightarrow{OP} svírá se souřadnicovou osou x úhel ψ , úhel POF_1 má proto velikost $\pi - \psi$. V trojúhelníku F_1OP použijeme kosinovou větu pro úhel POF_1 a dostáváme

$$\rho_1^2 = \rho_2^2 + (2 \cdot e)^2 - 2 \cdot (2 \cdot e) \cdot \rho_2 \cdot \cos(\pi - \psi) = \rho_2^2 + 4 \cdot e^2 + 4 \cdot e \cdot \rho_2 \cdot \cos(\psi),$$

protože je podle součtových vzorců $\cos(\pi - \psi) = -\cos(\psi)$.

Vzdálenost ρ_1 vyjádříme

$$\rho_1 = \sqrt{\rho_2^2 + 4 \cdot e^2 + 4 \cdot e \cdot \rho_2 \cdot \cos(\psi)}.$$

Pro další výpočty využijeme planimetrickou definici elipsy: je-li bod P bodem elipsy, pak pro něj platí, že součet jeho vzdáleností od ohnisek elipsy je roven dvojnásobku velikosti hlavní poloosy a elipsy, takže platí

$$\rho_1 + \rho_2 = 2 \cdot a.$$

Po dosazení je

$$\sqrt{\rho_2^2 + 4 \cdot e^2 + 4 \cdot e \cdot \rho_2 \cdot \cos(\psi)} + \rho_2 = 2 \cdot a,$$

a po osamostatnění odmocniny na levé straně rovnice, jejím následném umocnění na druhou, převedení výrazů obsahujících ρ_2 na jednu stranu a dalších algebraických úpravách postupně dostaneme

$$\rho_2 = \frac{a^2 - e^2}{e \cdot \cos(\psi) + a}.$$

Označíme-li b délku vedlejší poloosy elipsy, můžeme tento výraz upravovat dále:

$$\frac{a^2 - e^2}{e \cdot \cos(\psi) + a} = \frac{b^2}{a \cdot \left(1 + \frac{e}{a} \cdot \cos(\psi)\right)} = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos(\psi)},$$

kde p je parametr elipsy a

$$\varepsilon = \frac{e}{a}$$

je číselná výstřednost elipsy. Obdobným postupem pro ostatní kuželosečky bychom došli k závěru, že rovnice všech kuželoseček v polárních souřadnicích lze zapsat ve tvaru

$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos(\psi - \psi_0)},$$

kde p je parametr kuželosečky, ψ_0 je vhodně zvolený odečítací úhel a na velikosti ε záleží, o jaký typ kuželosečky se jedná: $\varepsilon = 0$ odpovídá kružnici, $0 < \varepsilon < 1$ elipse a $\varepsilon > 1$ hyperbole. Parametr p kuželosečky se v případě jiných kuželoseček než elipsa vypočítá jinak, než bylo uvedeno pro elipsu.

Podle 1. Keplerova zákona se planety, komety i umělá kosmická tělesa pohybují po elipsách. Její význačné hodnoty dostaneme pro úhel $\psi = 0$, kdy je vzdálenost této elipsy od ohniska (Slunce) nejmenší, a pro úhel $\psi = \pi$, kdy je tato vzdálenost největší, takže je

$$\rho_{min} = \frac{p}{1 + \varepsilon},$$

$$\rho_{max} = \frac{p}{1 - \varepsilon}$$

Tyto dvě krajní hodnoty se dobře pozorují, což umožňuje určit charakteristiky eliptické

$$\text{dráhy } p = \frac{2 \cdot \rho_{max} \cdot \rho_{min}}{\rho_{max} + \rho_{min}},$$

$$\varepsilon = \frac{\rho_{max} - \rho_{min}}{\rho_{max} + \rho_{min}}.$$

Další charakteristiky a a e elipsy potom pomocí těchto známých hodnot zjistíme (s využitím vztahů pro p a ε) úpravami výrazu pro

$$a = \frac{\frac{2 \cdot \rho_{max} \cdot \rho_{min}}{\rho_{max} + \rho_{min}}}{1 - \left(\frac{\rho_{max} - \rho_{min}}{\rho_{max} + \rho_{min}} \right)^2}$$

a pro

$$e = \frac{\frac{\rho_{max} - \rho_{min}}{\rho_{max} + \rho_{min}} \cdot \frac{2 \cdot \rho_{max} \cdot \rho_{min}}{\rho_{max} + \rho_{min}}}{1 - \left(\frac{\rho_{max} - \rho_{min}}{\rho_{max} + \rho_{min}} \right)^2},$$

po jejichž provedení dostaneme

$$a = \frac{\rho_{max} + \rho_{min}}{2} \text{ a } e = \frac{\rho_{max} - \rho_{min}}{2}$$

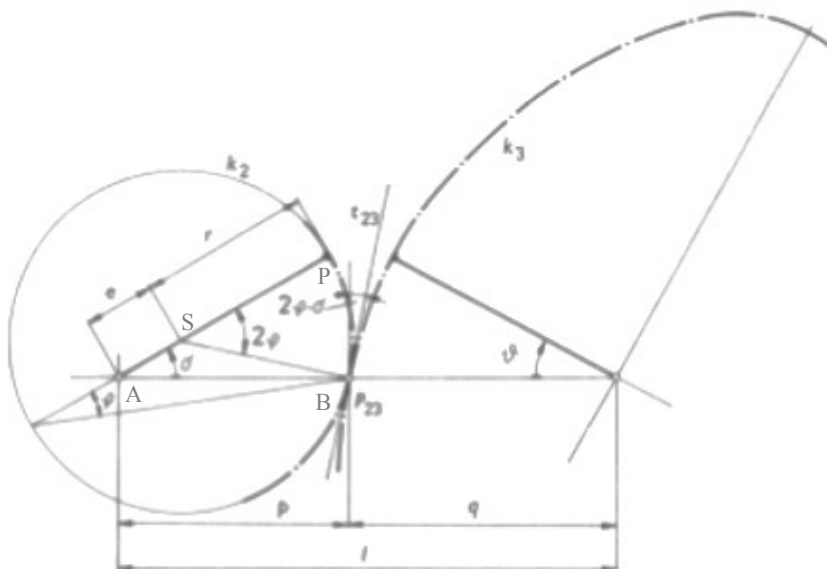
2.9 Ozubené soukolí s proměnlivým převodem^[9]

Jednou z možností, jak dosáhnout nerovnoměrné rotace hnaného členu, je použití ozubeného soukolí s proměnlivým převodem. Tento převod může být částí náhonu vačkového mechanismu, např. tkacího stroje.

Roztečné křivky (polodie) čelních kol jsou při dané osové vzdálenosti buď odvozeny z požadované převodové funkce, nebo je tvar jedné polodie zvolen. Pokud je jedno z kol kruhové excentricky uložené, výroba soukolí se zjednoduší. Pro tento typ převodového mechanismu určíme polodii nekruhového kola a popíšeme vztahy mezi kinematickými veličinami.

Ve schématu ozubeného převodu (obrázek č. 6) představují křivky k_2, k_3 polodie relativního pohybu kol, P_{23} pól pohybu a t_{23} tečnu polodií. Pootočení kol ze základní polohy jsou označena úhly σ, δ a odpovídající průvodiče pólu mají délky p, q . Geometrické veličiny vyjádříme pomocí parametru ψ , což je současně obvodový úhel odvaleného

kruhového oblouku. Středový úhel příslušný témuž oblouku má velikost 2ψ . Situace je znázorněna na obrázku č. 7.



Obrázek č. 7: Schéma ozubeného soukolí s proměnlivým převodem

Zavedeme nové veličiny

$$\varepsilon := \frac{e}{r}, \lambda := \frac{l}{r}.$$

V trojúhelníku ABS (viz obr. 6) známe velikosti stran $|AB| = p$, $|BS| = r$, $|SA| = e$, a dále známe velikost úhlu a $|\angle BSA| = \pi - 2\psi$. Díky tomu můžeme délku průvodiče pólu p vyjádřit pomocí proměnných r , ε a ψ , a to s využitím kosinové věty v trojúhelníku ABS pro úhel $\pi - 2\psi$. Dostáváme rovnost

$$p^2 = e^2 + r^2 - 2 \cdot e \cdot r \cdot \cos(\pi - \psi).$$

Navíc vyjádřím $e = r \cdot \varepsilon$ a podle součtového vzorce upravím $\cos(\pi - 2\psi) = \cos(\psi)$. Po dalších úpravách získám vyjádření

$$p = r \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + 1 + 2 \cdot \varepsilon \cdot \cos(2\psi)}. \quad (1)$$

Velikost průvodiče q vyjádřím pomocí stejných veličin jako velikost p . Protože podle obrázku je $p + q = l$, a protože lze zapsat $l = \lambda \cdot r$, je velikost

$$q = r \cdot (\lambda - \sqrt{\varepsilon^2 + 1 + 2 \cdot \varepsilon \cdot \cos(2\psi)}).$$

Dále vyjádřím úhel pootočení kruhového kola σ . K tomu využiji vztahů v trojúhelníku ABC a v trojúhelníku SBC . V rovnoramenném trojúhelníku ABC známe velikosti stran $|AB| = p$, $|AC| = p$, a velikost úhlu $|\sphericalangle BAC| = \sigma$. Pro výpočet velikosti strany BC použiji kosinovou větu

$$|BC|^2 = p^2 + p^2 - 2 \cdot p \cdot p \cdot \cos(\sigma),$$

ze které vyjádřím

$$\cos(\sigma) = \frac{2 \cdot p^2 - |BC|^2}{2 \cdot p^2}. \quad (2)$$

V rovnoramenném trojúhelníku SBC znám velikosti stran $|SB| = r$, $|CS| = r$ a velikost úhlu $|\sphericalangle BSC| = 2\psi$. Použiji v něm kosinovou větu a získám další vyjádření pro délku strany BC :

$$|BC|^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos(2\psi).$$

Po dosazení této rovnice do rovnosti (2) a po dosazení (1) za p dostávám po úpravách vztah

$$\sigma = \arccos\left(\frac{\varepsilon^2 + 2 \cdot \varepsilon \cdot \cos(2\psi) + \cos(2\psi)}{1 + \varepsilon^2 + 2 \cdot \varepsilon \cdot \cos(2\psi)}\right).$$

Nyní vyjádřím velikost úhlu δ , který vyjadřuje velikost pootočení nekruhového kola. Při jeho výpočtu vyjdu z podmínky valení v pólu P_{23} :

$$2r \, d\psi = \frac{p}{\cos(2\psi - \sigma)} \, d\sigma = \frac{q}{\cos(2\psi - \sigma)} \, d\delta.$$

Když z tohoto vztahu vyjádřím

$$d\delta = \frac{2 \cdot \cos(2\psi - \sigma)}{\lambda - \sqrt{\varepsilon^2 + 1 + 2 \cdot \varepsilon \cdot \cos(2\psi)}} \, d\psi$$

a dosadím za

$$\cos(2\psi - \sigma) = \frac{p}{2 \cdot r} \frac{d\sigma}{d\psi},$$

tak po úpravách dostanu rovnost

$$d\delta = \frac{1 + \varepsilon^2 + 2 \cdot \varepsilon \cdot \cos(2\psi)}{(\lambda - \sqrt{1 + \varepsilon^2 + 2 \cdot \varepsilon \cdot \cos(2\psi)}) \cdot \sqrt{1 + \varepsilon^2 + 2 \cdot \varepsilon \cdot \cos(2\psi)}} d\psi.$$

Tento výraz dále upravím zavedením nových veličin

$$k^2 := \frac{4 \cdot \varepsilon}{(1 + \varepsilon)^2},$$

$$n := \frac{4 \cdot \varepsilon}{\lambda^2 - (1 + \varepsilon)^2} \quad (3)$$

do tvaru vhodného pro integraci:

$$d\delta = \left\{ \frac{\lambda}{1 + \varepsilon} \cdot \left[\frac{\lambda^2 + 1 - \varepsilon^2}{\lambda^2 - (1 + \varepsilon)^2} \cdot \frac{1}{(1 + n \cdot (\sin(\psi))^2) \cdot \sqrt{1 - k^2 \cdot (\sin(\psi))^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \cdot (\sin(\psi))^2}} \right] + \frac{\lambda^2 + 1 - \varepsilon^2}{\lambda^2 - (1 + \varepsilon)^2} \cdot \frac{1}{1 + n \cdot (\sin(\psi))^2} - 1 \right\} d\psi \quad (4)$$

Při výpočtu integrálu na pravé straně této rovnosti budeme hledat tři dílčí integrály. Jedním z nich je

$$\int \frac{1}{1 + n \cdot (\sin(\psi))^2} d\psi.$$

Pro jeho výpočet použiji substituci

$$t = \operatorname{tg}(\psi) = \frac{\sin(\psi)}{\pm \sqrt{1 - (\sin(\psi))^2}}$$

Odtud potom vyjádřím

$$(\sin(\psi))^2 = \frac{t^2}{1 + t^2};$$

$$(\cos(\psi))^2 = \frac{1}{1 + t^2}.$$

Tyto úpravy převedou daný integrál na tvar

$$\int \frac{1}{(t \cdot \sqrt{1+n})^2 + 1} dt,$$

který řeším substitucí $s = t \cdot \sqrt{1+n}$. Tato substituce převede integrál na tvar

$$\frac{1}{\sqrt{1+n}} \int \frac{1}{s^2 + 1} ds.$$

Vyřešením tohoto integrálu a návratem ze substitucí dostávám výsledný tvar

$$\int \frac{1}{1 + n \cdot (\sin(\psi))^2} d\psi = \frac{\arctg(\sqrt{n+1} \cdot \tg(\psi))}{\sqrt{n+1}} + c_1,$$

kde c_1 je libovolná reálná konstanta.

Pro výpočet dalších dvou integrálů definuji funkce

$$F(\psi, k) := \int_0^\psi \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \cdot (\sin(\alpha))^2}} d\alpha$$

a

$$\Pi(\psi, n, k) := \int_0^\psi \frac{1}{(1 + n \cdot (\sin(\alpha))^2) \cdot \sqrt{1 - k^2 \cdot (\sin(\alpha))^2}} d\alpha.$$

Funkce $F(\psi, k)$ je eliptický integrál prvního druhu a funkce $\Pi(\psi, n, k)$ je eliptický integrál třetího druhu. K výpočtu těchto integrálů lze použít rozvoje integrované funkce v mocninnou řadu funkce $\sin(\alpha)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 + n \cdot (\sin(\alpha))^2) \cdot \sqrt{1 - k^2 \cdot (\sin(\alpha))^2}} = \\ = \frac{1}{1 + n \cdot (\sin(\alpha))^2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i k^{2i} \left[(\sin \alpha)^{2i} + \sum_{j=1}^{\infty} (-n)^j (\sin(\alpha))^{2 \cdot (i+j)} \right], \end{aligned} \quad (5)$$

kde koeficienty a_i zjistíme ze vztahu

$$a_i = \frac{(2i)!}{(2^i i!)^2}. \quad (6)$$

Po integraci vztahu (5) v mezích $\langle 0, \psi \rangle$ dostáváme

$$\Pi(\psi, n, k) = \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{n+1} \cdot \operatorname{tg}(\psi))}{\sqrt{n+1}} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i k^{2i} \left[Y_i(\psi) + \sum_{j=1}^{\infty} (-n)^j Y_{i+j}(\psi) \right]. \quad (7)$$

Protože je $F(\psi, k) = \Pi(\psi, 0, k)$, platí také

$$F(\psi, k) = \psi + \sum_{i=1}^{\infty} a_i k^{2i} Y_i(\psi). \quad (8)$$

K tomu bylo nutné najít rekurentní vztah pro integrál

$$Y_l(\psi) = \int_0^{\psi} (\sin(\alpha))^{2l} d\alpha.$$

Daný integrál vyřeším nejprve pro obecné přirozené n : najdu neurčitý integrál

$$I_n := \int (\sin(x))^n dx.$$

Zapišu

$$\int (\sin(x))^n dx = \int (\sin(x))^{n-1} \cdot \sin(x) dx$$

a použiju metodu per partes pro integraci neurčitého integrálu. Zavedu pomocné funkce $u(x) = (\sin(x))^{n-1}$

a $v'(x) = \sin(x)$.

Po provedení metody per partes a dalších úpravách získám tvar

$$\begin{aligned} \int (\sin(x))^n dx &= -\cos(x) \cdot (\sin(x))^{n-1} + \\ &+ (n-1) \int (\sin(x))^{n-2} dx - (n-1) \int (\sin(x))^n dx \end{aligned}$$

vzhledem k tomu, že oba integrály na pravé straně rovnosti existují pro $n > 1$. Pokud využijeme zavedené označení

$$I_n := \int (\sin(x))^n dx,$$

lze hledaný integrál I_n zapsat pomocí rekurentního vzorce

$$I_1 = -\cos(x) + c,$$

$$I_2 = -\frac{1}{4} \cdot \sin(2x) + \frac{1}{2} \cdot x + c,$$

$$I_n = -\frac{1}{n} \cdot \cos(x) \cdot (\sin(x))^{n-1} + \frac{n-1}{n} \int (\sin(x))^{n-2} dx.$$

Odtud po dosazení za $n = 2l$ dostávám rekurentní vzorec pro původní integrál

$$Y_1(\psi) = \frac{1}{2} \cdot (\psi - \sin(\psi) \cos(\psi)),$$

$$Y_l(\psi) = \frac{1}{2l} \cdot [-(\sin(\psi))^{2l-1} \cdot \cos(\psi) + (2l-1) \cdot Y_{l-1}(\psi)].$$

Nyní odvodím výsledný vztah pro numerický výpočet úhlu δ . K tomu využiji předchozí vztahy (3) až (6); jejich dosazením do vztahu pro δ , který najdu integrací rovnosti (7), dostanu

$$\begin{aligned} \delta = & \frac{\lambda}{\varepsilon \cdot [\lambda^2 - (1 + \varepsilon)^2]} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i)! \varepsilon^i}{[i! (1 + \varepsilon)^i]^2} \left\{ 2Y_i(\psi) \right. \\ & + \frac{\lambda^2 + 1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{-4\varepsilon}{\lambda^2 - (1 + \varepsilon)^2} \right]^j Y_{i+j}(\psi) \left. \right\} + \frac{\lambda + 1 + \varepsilon}{1 + \varepsilon} \\ & \cdot \left\{ \frac{\lambda^2 + 1 - \varepsilon^2}{\sqrt{[\lambda^2 - (1 + \varepsilon)^2] \cdot [\lambda^2 - (1 - \varepsilon)^2]}} \right. \\ & \cdot \arctg \left[\sqrt{\frac{\lambda^2 - (1 - \varepsilon)^2}{\lambda^2 - (1 + \varepsilon)^2}} \cdot \operatorname{tg}(\psi) \right] - \psi \left. \right\}. \end{aligned}$$

Pokud má soukolí při otáčení znovu procházet výchozí polohou, pak musí být délka polodie k_3 přirozeným násobkem délky roztečné kružnice k_2 . Podmínku

$$\delta\left(\frac{\pi}{2}, \varepsilon, \lambda\right) = \frac{\pi}{m}, m \in N$$

musí splňovat poměrné veličiny ε, λ pro použitý průměrný převod m . Volbou poměrné excentricity ε lze ovlivnit průběh převodové funkce.

2.10 Lámavé hranoly^[10]

Lámavé hranoly slouží k rozdělení polychromatického svazku rovnoběžných paprsků podle vlnových délek na základě lomu (refrakce); z hranolu vystupují svazky různých vlnových délek různými směry. Hranoly jsou konstruovány buď jako jednoduché, vyrobené z izotropního materiálu, nebo jako složené z několika hranolů z různého materiálu. Základní charakteristikou hranolu je úhlová disperze

$$\frac{d\delta}{d\lambda'}$$

což je úhel, pod kterým z hranolu vystupují dva svazky paprsků; ty se ve vlnové délce liší o $0,1nm$. Pro jednoduchý hranol je úhlová disperze definována vztahem

$$\frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{1 - n^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}} \frac{dn}{d\lambda'}$$

kde α je tzv. lámavý úhel hranolu a

$$\frac{dn}{d\lambda}$$

je disperze materiálu hranolu.

Tento vzorec platí jen tehdy, když je hranol v poloze minimální deviace. Pokud hranol vychýlíme z této polohy, disperze značně vzroste.

Mřížky

Mřížka slouží ke stejnému účelu jako hranol, ale na základě ohybu (difrakce). Rovinná transparentní mřížka je tvořená řadou štěrbin, jejichž středy jsou od sebe vzdáleny o mřížkovou konstantu d . Pro chod svazku mřížkou platí vztah

$$d \cdot (\sin(\alpha) + \sin(\beta)) = m \cdot \lambda,$$

kde m je tzv. řád spektra. Z rovnice dostaneme pro úhlovou disperzi mřížky výraz

$$\frac{d\beta}{d\lambda} = \frac{m}{d \cdot \cos(\beta)}.$$

Úhlová disperze je nejmenší pro svazky, které se málo odchyľují od normály, tedy pokud je

$$\beta \doteq 0.$$

(tzv. normální spektrum). V tomto případě platí vztah

$$\Delta\beta = \textit{konst.} \cdot \Delta\lambda.$$

V normálním spektru je úhlová vzdálenost dvou svazků, které mají v každém místě konstantní rozdíl vlnových délek stejné. Tím se mřížka zásadně liší od hranolu a mřížkové spektrum od spektra hranolového. Další rozdíl mezi mřížkou a hranolem je, že se u mřížky nejvíce odchyľují dlouhé vlny, zatímco u hranolu je tomu obráceně.

Fotometrie

Při odvozování pojmů a vztahů vycházíme z představy kulového zdroje malých rozměrů, který vysílá rovnoměrně do celého prostoru celkovou vyzařovanou energii Q_e . Energie vyzařovaná do celého prostoru za sekundu se nazývá tok záření

$$\Phi_e = \frac{dQ_e}{dt}.$$

V dalším výkladu předpokládáme, že se zářič řídí kosinovým zákonem Lambertovým⁵. Tok vysílaný plošným elementem ds je dán diferenciální rovnicí

$$d\Phi_e = L_e ds d\omega \cos(\varepsilon),$$

kde $d\omega$ je element prostorového úhlu, do něhož je vysílán tok $d\Phi_e$, ε -úhel, který svírá směr, jímž je tok $d\Phi_e$ vysílán, s normálou plošného elementu ds . Konstanta L_e zvaná zář

⁵ Podle Lambertova kosinového zákona zářivost izotropního rovinného plošného zdroje v každém jeho bodě klesá, tak jak se snižuje hodnota kosinu úhlu, který svírá dopadající paprsek s kolmicí na plochu zdroje.

je podíl toku záření připadající na 1m^2 plochy zářiče, vysílaný do jednotkového prostorového úhlu ve směru paprsku, který svírá s normálou plochy ds úhel ε . Výraz

$$I_e = \frac{d\Phi_e}{d\omega}$$

se nazývá zářivost. Výraz

$$M_e = \frac{d\Phi_e}{ds}$$

je intenzita vyzařování, výraz

$$E_e = \frac{d\Phi}{dS}$$

značí ozáření (dS je element plochy, na kterou záření dopadá). V subjektivní fotometrii odpovídá energii Q_e světelné množství Q , jehož jednotka je lumensekunda, toku záření Φ_e odpovídá tok světla Φ (lumen). Zář L_e odpovídá jas L , zářivosti I_e odpovídá svítivost

$$I = \frac{d\Phi}{d\omega}.$$

Intenzitě ozáření odpovídá osvětlení

$$E = \frac{d\Phi}{dS}.$$

Součin ozáření, resp. osvětlení a času se nazývá expozice H . Vztah mezi jasnem a ostatními veličinami je dán rovnicemi

$$L = \frac{d\Phi}{ds} \frac{1}{d\omega \cos(\varepsilon)} = \frac{dI}{ds} \frac{1}{\cos(\varepsilon)} = \frac{dE}{d\omega} \frac{1}{\cos(\varepsilon)}.$$

2.11 Šikmý vrh^[8]

Zadání.

Dráha tělesa vrženého šikmo pod úhlem α k vodorovné ose x v homogenním tíhovém poli určeném zrychlením g počáteční rychlostí v_0 je určena parametrickými rovnicemi

$$x = v_0 \cdot t \cdot \cos(\alpha)$$

$$y = v_0 \cdot t \cdot \sin(\alpha) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Určete celkovou délku dráhy při takovém šikmém vrhu.

Řešení.

Nejprve určíme, jakou křivkou je trajektorie takového vrhu. Ze vztahu pro proměnnou x vyjádříme

$$t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos(\alpha)}$$

a dosadíme tento výraz do vztahu pro y ; dostaneme

$$\begin{aligned} y &= v_0 \cdot \frac{x}{v_0 \cdot \cos(\alpha)} \cdot \sin(\alpha) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos(\alpha)} \right)^2 \\ &= x \cdot \operatorname{tg}(\alpha) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)}. \quad (1) \end{aligned}$$

Pro další úpravu tohoto výrazu využijeme substitucí

$$x = x' + \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$$

a

$$y = -y' + \frac{v_0^2}{2 \cdot g} \cdot \sin^2(\alpha).$$

Dosadíme-li tyto výrazy za x a y do vztahu (1), tak po úpravách získáme vyjádření

$$x'^2 = \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)}{g} \cdot y',$$

což udává rovnici paraboly, která má vrchol v počátku a její osou je souřadnicová osa y . Protože lze každou takovou parabolu zapsat rovnicí

$$x^2 = 2p \cdot y,$$

kde p je parametr paraboly, plyne odtud, že trajektorie šikmého vrhu je parabola s parametrem

$$p = \frac{v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)}{g}.$$

Velikost parametru je přímo úměrná počáteční rychlosti v_0 a nepřímo úměrná velikosti ostrého úhlu α : hodnoty parametru p jsou největší pro nejvyšší počáteční rychlost vrhu a pro úhel $\alpha \rightarrow 0$. Čím jsou hodnoty parametru p vyšší, tím větší maximální výše těleso při šikmém vrhu dosáhne.

Protože y -ová souřadnice je v okamžiku vržení tělesa i v okamžiku jeho dopadu rovna 0, lze po dosazení za $y = 0$ zjistit (integrační) meze pohybu tohoto tělesa. Máme tedy rovnici

$$x \cdot \operatorname{tg}(\alpha) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)} = 0, (1)$$

ze které po rozkladu její levé strany na součin vyplývá, že je buď

$$x = 0$$

(dolní mez integrálu), nebo

$$\operatorname{tg}(\alpha) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x}{v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)} = 0,$$

odkud vyjádříme x ve tvaru

$$x = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2\alpha)$$

(horní mez integrálu).

Nyní využijeme vzorec pro výpočet délky oblouku křivky: je-li dána křivka $y = f(x)$ na intervalu $(a; b)$, pak délku oblouku s této křivky zjistíme integrací

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

K tomu je nutné vypočítat první derivaci výrazu

$$y = (1).$$

Ta se rovná

$$y' = \operatorname{tg}(\alpha) - \frac{g \cdot x}{v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)}.$$

Délku křivky vypočítáme pomocí určitého integrálu, který vyřešíme substitucí

$$\xi = \operatorname{tg}(\alpha) - \frac{g \cdot x}{v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)},$$

ale je nutné přepočítat meze pro použitou substituci. Proto vyjádříme

$$x = \frac{v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)}{g} \cdot (\operatorname{tg}(\alpha) - \xi).$$

Protože integrál před použitím substituce byl v mezích od 0 do

$$\frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2\alpha),$$

zjistíme nyní dolní mez integrálu jako řešení rovnice

$$\frac{v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)}{g} \cdot (\operatorname{tg}(\alpha) - \xi) = 0$$

s neznámou ξ . Protože je úhel vrhu

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2}$$

a $\cos(\alpha) \neq 0$, musí být roven nule činitel $\operatorname{tg}(\alpha) - \xi$, což znamená, že dolní mez vzniklého integrálu je rovna $\operatorname{tg}(\alpha)$. Horní mez tohoto integrálu zjistíme nalezením řešení rovnice

$$\frac{v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)}{g} \cdot (\operatorname{tg}(\alpha) - \xi) = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2\alpha),$$

kde nejprve upravíme pravou stranu rovnice s využitím součtového vzorce (i)

$$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha + \alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha),$$

a poté algebraickými úpravami osamostatníme ξ , čímž zjistíme, že $\xi = -\operatorname{tg}(\alpha)$, což je hledaná horní mez integrálu. Výrazy $\sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$ i $\operatorname{tg}(\alpha)$ jsou oba kladné, protože je úhel $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, neboť se jedná o úhel vrhu. Nyní se vrátíme k zavedené substituci v integrálu. Z výrazu pro x zjistíme derivací tvar

$$dx = -\frac{v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)}{g} d\xi,$$

čímž po dosazení těchto hodnot do integrandu dostaneme výraz

$$s = \int_{\operatorname{tg}(\alpha)}^{-\operatorname{tg}(\alpha)} -\frac{v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)}{g} \cdot \sqrt{(1 + \xi^2)} d\xi.$$

To lze s využitím linearit integrálů přepsat do tvaru

$$-\frac{v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)}{g} \int_{\operatorname{tg}(\alpha)}^{-\operatorname{tg}(\alpha)} \sqrt{(1 + \xi^2)} d\xi.$$

Označíme neurčitý integrál

$$I := \int \sqrt{(1 + \xi^2)} d\xi;$$

tento integrál vyřešíme použitím metody per partes. Zapišeme integrovaný výraz jako součin

$$\int 1 \cdot \sqrt{(1 + \xi^2)} d\xi.$$

Dále označíme

$$u'(\xi) = 1 \text{ a } v(\xi) = \sqrt{(1 + \xi^2)}.$$

Odtud zjistíme

$$u(\xi) \stackrel{c}{\equiv} \xi \text{ a } v'(\xi) = \frac{\xi}{\sqrt{(1 + \xi^2)}}.$$

Podle pravidel pro integrování metodou per partes dále vyjádříme

$$I = \int \sqrt{(1 + \xi^2)} d\xi = \xi \cdot \sqrt{(1 + \xi^2)} - \int \frac{\xi^2}{\sqrt{(1 + \xi^2)}} d\xi.$$

Označíme symbolem

$$I_1 := \int \frac{\xi^2}{\sqrt{(1 + \xi^2)}} d\xi;$$

tento integrál budeme řešit následujícími úpravami:

$$\int \frac{\xi^2}{\sqrt{(1 + \xi^2)}} d\xi = \int \frac{(1 + \xi^2) - 1}{\sqrt{(1 + \xi^2)}} d\xi = \int \left(\sqrt{(1 + \xi^2)} - \frac{1}{\sqrt{(1 + \xi^2)}} \right) d\xi.$$

Integrál I lze tedy zapsat takto:

$$\int \sqrt{(1 + \xi^2)} d\xi = \xi \cdot \sqrt{(1 + \xi^2)} - \int \sqrt{(1 + \xi^2)} d\xi + \int \frac{1}{\sqrt{(1 + \xi^2)}} d\xi.$$

Protože se integrál I vyskytuje na levé i pravé straně této rovnosti s opačnými znaménky, můžeme jej zapsat

$$2 \cdot I = \xi \cdot \sqrt{(1 + \xi^2)} + \int \frac{1}{\sqrt{(1 + \xi^2)}} d\xi$$

a vzniklou rovnost vydělit dvěma, abychom osamostatnili I . Nyní spočítáme integrál na pravé straně, který označíme symbolem

$$I_2 := \int \frac{1}{\sqrt{(1 + \xi^2)}} d\xi.$$

K tomu využijeme substituci

$$t = \sqrt{(1 + \xi^2)}. \quad (2)$$

Po zderivování obou stran rovnosti dostaneme

$$dt = \frac{\xi}{\sqrt{(1 + \xi^2)}} d\xi.$$

Z rovnosti (2) vyjádříme

$$\xi = \sqrt{t^2 - 1}$$

a získáme integrál

$$\int \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}} dt.$$

Vzhledem k tomu, že pro zápornou hodnotu

$$\xi = -\sqrt{t^2 - 1}$$

by závěr úlohy byl stejný, jak bude ukázáno dále, můžeme bez újmy na obecnosti pracovat jen s kladným vyjádřením ξ . Upravíme jmenovatel integrandu

$$\int \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}} dt = \int \frac{1}{(t - 1) \cdot \sqrt{\frac{t+1}{t-1}}} dt$$

a pro tento tvar použijeme substituci

$$s = \sqrt{\frac{t+1}{t-1}}.$$

Z ní vyjádříme závislost proměnné t na proměnné s algebraickými úpravami, kterými získáme tvar

$$t = \frac{s^2 + 1}{s^2 - 1}$$

a jeho derivaci

$$dt = \frac{-4 \cdot s}{(s^2 - 1)^2} ds.$$

Tím převedeme daný integrál do tvaru

$$\int \frac{1}{\left(\frac{s^2+1}{s^2-1} - 1\right) \cdot s} \cdot \frac{-4 \cdot s}{(s^2 - 1)^2} ds,$$

který úpravami zlomků a využitím linearit Newtonova integrálu upravíme na

$$-2 \int \frac{1}{s^2 - 1} ds. (3)$$

Vzniklý integrál nyní rozložíme na součet parciálních zlomků, což dává

$$-2 \int \left(\frac{\frac{-1}{2}}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s-1} \right) ds = \int \frac{1}{s+1} ds - \int \frac{1}{s-1} ds,$$

neboť mají oba integrály na pravé straně smysl. Odtud už snadno dostaneme tvar

$$\ln \left(\frac{|s+1|}{|s-1|} \right);$$

ten platí až na konstantu, kterou ale můžeme při výpočtu určitého integrálu zanedbat. Když nyní dosadíme do tohoto tvaru nejprve za proměnnou s proměnnou t z druhé substituce, a poté za proměnnou t proměnnou ξ z první substituce, tak po úpravách zjistíme, že je

$$\int \frac{1}{\sqrt{(1+\xi^2)}} d\xi = \ln \left| \xi + \sqrt{(\xi^2 + 1)} \right|$$

až na konstantu.

(3) Pokud bychom uvažovali příklad, kdy je

$$\xi = -\sqrt{t^2 - 1},$$

dostali bychom zde integrál

$$2 \int \frac{1}{s^2 - 1} ds.$$

Ten bychom potom rozložili na součet stejných parciálních zlomků a po zintegrování sčítanců bychom dostali tvar

$$\ln \left(\frac{|s-1|}{|s+1|} \right).$$

Zpětným nahrazením a úpravami bychom nakonec dostali

$$\ln \left| -\xi + \sqrt{(\xi^2 + 1)} \right|.$$

Protože je ale $\xi < 0$, je tento tvar stejný jako v případě $\xi > 0$.

Nyní už můžeme vyjádřit integrál

$$I = \int \sqrt{(1+\xi^2)} d\xi = \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot \sqrt{(1+\xi^2)} + \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \xi + \sqrt{(\xi^2 + 1)} \right|$$

až na konstantu. Pro výpočet délky oblouku křivky nyní přejdeme k určitému integrálu

$$s = -\frac{v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)}{g} \int_{\operatorname{tg}(\alpha)}^{-\operatorname{tg}(\alpha)} \sqrt{1 + \xi^2} \, d\xi.$$

Definujme funkci

$$f(\xi) := \sqrt{1 + \xi^2}.$$

Tato funkce je spojitá na množině reálných čísel, tedy také na intervalu $\langle -\operatorname{tg}(\alpha); \operatorname{tg}(\alpha) \rangle$, proto se limity ve všech bodech primitivní funkce k této funkci rovnají funkčním hodnotám v těchto bodech. Můžeme proto dosadit a upravovat

$$\begin{aligned} -\frac{v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)}{g} \int_{\operatorname{tg}(\alpha)}^{-\operatorname{tg}(\alpha)} \sqrt{1 + \xi^2} \, d\xi &= \\ &= -\frac{v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)}{g} \\ &\quad \cdot \left(\left(\frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg}(\alpha) \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha)} + \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \operatorname{tg}(\alpha) + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha)} \right| + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg}(\alpha) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot \sqrt{1 + (-\operatorname{tg}(\alpha))^2} \right) - \frac{1}{2} \cdot \ln \left| -\operatorname{tg}(\alpha) + \sqrt{1 + (-\operatorname{tg}(\alpha))^2} \right| \right). \end{aligned}$$

Využijeme identitu

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha)} = \frac{1}{\cos(\alpha)},$$

protože $\cos(\alpha) > 0$, neboť úhel α je ostrý, a po dalších úpravách zjistíme, že hledaná délka dráhy při šikmém vrhu je rovna

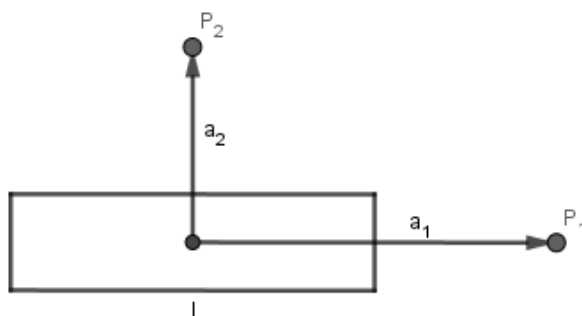
$$s = \frac{v_0^2}{g} \cdot \left[\sin(\alpha) + \cos^2(\alpha) \cdot \ln \left(\frac{\sin(\alpha) + 1}{\cos(\alpha)} \right) \right].$$

2.12 Potenciál gravitačního pole^[4]

Potenciál gravitačního pole udává, jakou potenciální energii má těleso v přepočtu na jeden kilogram své hmotnosti. Jedná se o bezrozměrnou fyzikální skalární veličinu.

Zadání.

Určete potenciál gravitačního pole tyče délky l o hmotnosti m v bodě P_2 na přímce kolmé k tyči a procházející hmotným středem tyče. Rozměry jsou uvedeny na obrázku č. 8.



Řešení.

Vzdálenost elementu dx od bodu P_2 je podle obrázku rovna $\sqrt{x^2 + a_2^2}$. Příspěvek elementu tyče dx k celkovému potenciálu v bodě P_2 je

$$d\psi_{g2} = -\kappa \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + a_2^2}} dm.$$

Vzdálenost x se mění od 0 do $\frac{l}{2}$

pro příspěvek poloviny délky tyče k celkovému potenciálu. Potenciál ψ_g je skalární veličina. Proto určíme potenciál gravitačního pole celé tyče tak, že příspěvek poloviny tyče vynásobíme dvěma a zjistíme hodnotu následujícího určitého integrálu v mezích od 0 do $\frac{l}{2}$:

$$\psi_{g2} = -2 \cdot \kappa \cdot \frac{m}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a_2^2}}. \quad (1)$$

Tento integrál vyřeším tak, že nejprve použiji substituci a najdu její první derivaci

$$x = a_2 \cdot \operatorname{tg}(\psi)$$

$$dx = a_2 \cdot \frac{1}{\cos^2(\psi)} d\psi$$

Meze určitého integrálu po substituci budou

$$\psi_1 = 0$$

a

$$\psi_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{l}{2a_2}\right).$$

Tím získám další vyjádření

$$\psi_{g2} = -2 \cdot \kappa \cdot \frac{m}{l} \int_0^{\operatorname{arctg}\left(\frac{l}{2a_2}\right)} \frac{1}{\sqrt{a_2^2 \cdot \operatorname{tg}^2(\psi) + a_2^2}} \cdot \frac{a_2}{\cos^2(\psi)} d\psi.$$

V dalších úpravách využiji rovnost

$$\sqrt{\operatorname{tg}^2(\psi) + 1} = \frac{1}{\cos(\psi)}.$$

Všechny funkční hodnoty funkce arcus tangens jsou menší než $\frac{\pi}{2}$,

a tudíž jsou obě meze hledaného určitého integrálu v intervalu $\langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$.

Pro všechna ψ z tohoto intervalu nabývá funkce kosinus kladných hodnot.

Určitý integrál nyní upravím na tvar

$$\psi_{g2} = -2 \cdot \kappa \cdot \frac{m}{l} \int_0^{\operatorname{arctg}\left(\frac{l}{2a_2}\right)} \frac{1}{\cos(\psi)} d\psi.$$

Integrand rozšířím výrazem

$$\frac{\cos(\psi)}{\cos(\psi)},$$

a dále použiji substituci

$$t = \sin(\psi)$$

$$dt = \cos(\psi) d\psi.$$

Tím získám další tvar určitého integrálu v nových mezích

$$\psi_{g2} = -2 \cdot \kappa \cdot \frac{m}{l} \int_0^{\sin(\arctg(\frac{l}{2a_2}))} 1 - t^2 dt.$$

Příklad budu dále řešit tak, že najdu neurčitý integrál

$$\int 1 - t^2 dt$$

a pak se zpětnou substitucí za neznámou t a následně za neznámou ψ vrátím k neurčitému integrálu (1).

Daný neurčitý integrál nejprve na parciální zlomky a poté určím tabulkové integrály, takže dostanu rovnost

$$\int 1 - t^2 dt = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{t+1} - \frac{\frac{1}{2}}{t-1} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{|t+1|}{|t-1|} \right) + c_1.$$

Po dalších úpravách zjistím hodnotu určitého integrálu (1), takže určím hodnotu výrazu

$$V := -\kappa \cdot \frac{m}{l} \cdot \left[\ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + a_2^2}}{-x + \sqrt{x^2 + a_2^2}} \right) \right]_0^{\frac{l}{2}}.$$

Hodnotu výrazu V najdu tak, že za proměnnou x dosadím

$$\frac{l}{2}$$

a pak od získané hodnoty odečtu hodnotu získanou po dosazení čísla 0. Argument funkce přirozený logaritmus poté usměrním a dostanu výsledný tvar

$$\psi_{g2} = -\kappa \cdot \frac{m}{l} \cdot \ln \left(\frac{l^2 + 2 \cdot a_2^2 + l \cdot \sqrt{l^2 + 4 \cdot a_2^2}}{2 \cdot a_2^2} \right).$$

Protože mezi intenzitou pole κ a potenciálem ψ ve vzdálenosti r od středu pole platí vztah

$$\kappa = -\frac{d\psi}{dr} r^0,$$

kde \mathbf{r}^0 je jednotkový vektor ve směru \vec{r} , můžeme z potenciálu pole derivací určit intenzitu.

2.13 Simulační modely^[11]

Metody Monte Carlo

Metody Monte Carlo jsou metody řešení numerických úloh pomocí speciálně organizovaných statistických pokusů. Při použití těchto metod získáváme řešení pomocí umělých realizací náhodných procesů, které jsou vytvořeny tak, aby některé z jejich charakteristik (např. střední hodnota, pravděpodobnost určitého jevu apod.) byly řešením úlohy. K tomu je potřeba jednak formulovat novou úlohu, která má řešení shodné s původní úlohou, a za druhé řešit novou úlohu pomocí statistických experimentů.

Historie používání metod Monte Carlo úzce souvisí s rozvojem výpočetní techniky, protože rozsah nezbytných výpočtů je obvykle takový, že se bez počítače nedá zvládnout. Proto byly dříve případy použití metod Monte Carlo poměrně řídké. Jednou z výjimek je Buffonova úloha (G. L. Buffon), která je zadána následovně:

Zadání.

Na desku, na které jsou nakresleny stejně od sebe vzdálené rovnoběžné přímky, je náhodně vrhána jehla. Označíme délku jehly H a vzdálenost dvou sousedních přímek L . Dokažte, že pravděpodobnost, že jehla při jednom pokusu zůstane ležet na desce tak, že protne jednu z přímek, lze vyjádřit vztahem

$$P = \frac{2 \cdot H}{\pi \cdot L},$$

kde $H < L$.

Řešení.

Označme y vzdálenost středu jehly od nejbližší přímky, a dále označme úhel α jako menší z úhlů, který svírá směr jehly s přímkou kolmou na narysované přímky. Polohu jehly můžeme nyní určit dvojicí (y, α) , přičemž je

$$0 \leq y \leq \frac{L}{2}, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}.$$

Toto určení je jednoznačné až na posunutí ve směru přímk, které ale není pro úlohu podstatné. K tomu, aby jehla protla jednu z přímk, je třeba, aby platilo

$$y \leq \frac{H}{2} \cdot \cos(\alpha).$$

Všechny přípustné dvojice (y, α) jsou body obdélníku s délkami stran $\frac{H}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$.

V něm jsou vyšrafovány body příznivé jevu „jehla protla jednu z přímk“. Pokud je jehla vrhána tak, že všechny dvojice (y, α) z tohoto obdélníku mají stejnou pravděpodobnost výskytu, tak pravděpodobnost P , že jehla protne jednu z přímk, je dána poměrem obsahu vyšrafované části obdélníku k jeho celkovému obsahu. Zjistíme ji tedy výpočtem

$$P = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{H}{2} \cdot \cos(\alpha) d\alpha}{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{L}{2}} = \frac{\frac{H}{2} [\sin(\alpha)]_0^{\frac{\pi}{2}}}{\frac{\pi \cdot L}{4}} = \frac{2 \cdot H}{\pi \cdot L}.$$

Vztah

$$P = \frac{2 \cdot H}{\pi \cdot L}$$

je také možné využít k určení přibližné hodnoty čísla π tím, že budeme provádět n nezávislých výše popsaných pokusů. Jestliže jev „jehla protla jednu z přímk“ nastal v m případech, pak P odhadneme relativní četností m/n . Pro odhad π pak dostáváme přibližné vyjádření

$$\pi \doteq \frac{2H}{L} \cdot \frac{n}{m}.$$

Popsaný experiment byl mnohokrát proveden. Například pro $N = 5000$ byl získán odhad $\pi \doteq 3,159$.

2.14 Řešení metodou perturbace^[12]

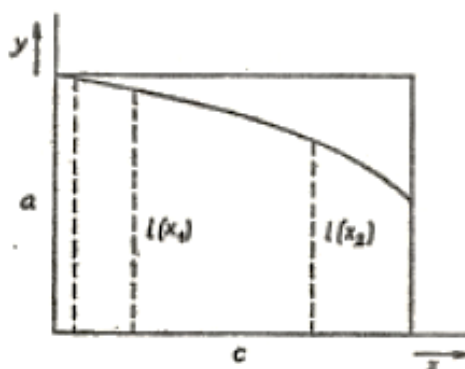
Řešení Laplaceovy rovnice s použitím dalších zjednodušení

Řešení metody spočívá v tom, že srovnáváme komplikovanější úlohu s relativně jednoduchou úlohou, kterou umíme alespoň aproximativně řešit. Pokud lze složitější úlohu matematicky formulovat s použitím malého parametru ε , který charakterizuje určitou poruchu základního systému, pak řešení (např. potenciál Φ), hledáme ve tvaru mocninné řady

$$\Phi = \Phi_0 + \varepsilon \cdot \Phi_1 + \varepsilon^2 \cdot \Phi_2 + \dots,$$

kde Φ_0 je řešení základní úlohy a Φ_1, Φ_2, \dots představují poruchové členy.

Mějme danu soustavu na obrázku č. 9.



Obrázek č. 9: Elektrolyzér s jednou elektrodou ve tvaru paraboly.

Symboly $l(x_1)$ a $l(x_2)$ označují délky proudových čar v bodech x_1 a x_2 .

Předpokládejme, že anoda má tvar paraboly

$$y = a - b \cdot x^2,$$

kteřá má malou hodnotu koeficientu b . V takovém případě se oblast mezi katodou a anodou příliš neliší od obdélníkové oblasti. Proto považujeme systém s dvěma rovnoběžnými elektrodami za základní a daný systém s parabolickou anodou popíšeme pomocí vhodně voleného parametru. Nahradím funkci

$$y = a - b \cdot x^2$$

prvními dvěma členy Fourierova rozvoje

$$y = p + q \cdot \cos\left(\frac{\pi}{c}x\right),$$

přičemž

$$p = a - \frac{1}{3} \cdot b \cdot c^2$$

$$q = \frac{4 \cdot b \cdot c^2}{\pi^2}.$$

Nyní zavedeme parametr

$$\varepsilon := \frac{q}{p},$$

který má podle předpokladu o tvaru paraboly malou hodnotu. Podmínka $\varepsilon = 0$ je ekvivalentní s podmínkou $b = 0$, to znamená, že anoda je v tomto případě rovnoběžná s katodou ve vzdálenosti $y = a$. Okrajové podmínky jsou

$$\psi_{s,K} = -E_{K,r} \text{ a } \psi_{s,A} = U - E_{A,r}.$$

Definujeme funkci Φ předpisem

$$\Phi := \frac{\psi + E_{K,r}}{U - E_{A,r} + E_{K,r}}.$$

Zavedením této funkce se okrajové podmínky pro povrch anody a katody zjednoduší na $\Phi_A=1$, $\Phi_K=0$.

Funkci vyjádříme ve tvaru mocninné řady vzhledem k parametru ε a budeme uvažovat pouze její první dva členy $\Phi = \Phi_0 + \varepsilon \cdot \Phi_1$. Přitom je Φ_0 řešení Laplaceovy rovnice na obdélníku $x \in \langle 0; c \rangle$, $a \in \langle 0; a \rangle$

s okrajovými podmínkami

$$\Phi_0 = 0 \text{ pro } a = 0 \text{ a } \Phi_0 = 1 \text{ pro } y = a.$$

Veličina Φ_1 označuje perturbaci řešení způsobenou malým zakřivením anody.

Laplaceova rovnice se pro Φ_0 redukuje na obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu, protože homogenní pole nezávisí na souřadnici x . Jedná se o funkci

$$\Phi_0 = \frac{y}{a} \cdot (*)$$

Okrajová podmínka pro Φ_1 je $\Phi_1=0$ pro $y=0$; podmínku pro

$\Phi_{1,A}$ pro

$$y = p + q \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{c}\right)$$

získáme z rovnice

$$1 = \Phi_0 + \varepsilon \cdot \Phi_{1,A}.$$

Dosazením (*) do této rovnice dostaneme přibližně tvar

$$\Phi_{1,A} = \frac{\pi^2}{12} - \cos\left(\frac{\pi x}{c}\right).$$

Nyní budeme řešit Laplaceovu rovnici pro Φ_1 využitím následujícího předpokladu:

$$\Phi_1(x, y) = C \cdot y - X(x) \cdot Y(y).$$

Jejím řešením je funkce

$$\Phi_1(x, y) = \frac{\pi^2}{12 \cdot p} \cdot y - \cos\left(\frac{\pi x}{c}\right) \cdot \left(A \cdot \sinh\left(\frac{\pi y}{c}\right) + B \cdot \cosh\left(\frac{\pi y}{c}\right)\right).$$

Z okrajové podmínky pro $y = 0$ plyne $B = 0$. Použitím další okrajové podmínky pro $\Phi_{1,A}$ při respektování předpokladu $q \ll p$ dostáváme

$$A = \frac{1}{\sinh\left(\frac{\pi p}{c}\right)}.$$

Výsledné řešení má tedy tvar

$$\Phi = \frac{y}{a} - \varepsilon \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{c}\right) \cdot \frac{\sinh\left(\frac{\pi y}{c}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi p}{c}\right)} + \varepsilon \cdot \frac{\pi^2}{12 \cdot p} \cdot y.$$

Proudová hustota pro $y = p$ je pak

$$j_n(x) = \frac{1}{\rho_E} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{\varepsilon \cdot \pi}{c} \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{c}\right) \cdot \frac{\cosh\left(\frac{\pi p}{c}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi p}{c}\right)} - \frac{\varepsilon \cdot \pi^2}{12 \cdot p} \right) \cdot (U - E_{A,r} + E_{K,r}).$$

Přibližnou hodnotu relativní proudové hustoty zjistíme ze vztahu

$$\frac{j_n(x)}{j_n} = 1 - \frac{q \cdot \pi}{c} \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{c}\right) \cdot \cotg\left(\frac{\pi p}{c}\right).$$

2.15 Automatizace chladících zařízení^[13]

Regulace teploty chlazeného prostředí

Technologickým účelem chladicího zařízení je odvádění tepla, které vniká do tepelně izolovaného prostoru zvenčí, a dalšího tepla, které se do tohoto prostoru přivádí například elektrickým proudem k pohonu ventilátorů a k osvětlení, teplem vneseným s ukládaným zbožím a lidmi při manipulaci s ním, nebo jiným způsobem. Nejdůležitější regulovanou veličinou je pak teplota ochlazovaného prostředí. Omezíme obvod, v němž probíhá regulační pochod, na stěny chlazeného prostoru, chlazený prostor, předměty v něm uložené, výparník, kompresor a čidlo regulátoru.

Pro součet tepla, které vniká do chlazeného prostoru stěnami, a tepla v něm uvolňovaného uvedenými zdroji lze psát rovnici

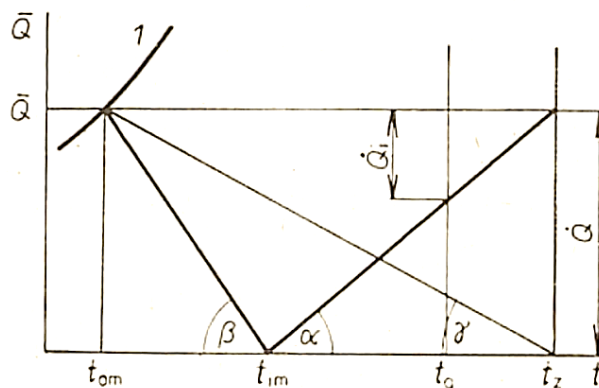
$$Q = A_a \cdot k_a \cdot (t_a - t_i) + Q_i, (1)$$

a pro teplo odváděné kompresorem z výparníku

$$\bar{Q} = A_o \cdot k_o \cdot (t_i - t_o), (2)$$

kde A_a je povrchová plocha stěn chlazeného prostoru, k_a je součinitel prostupu tepla těmito stěnami, Q_i je teplo uvolňované vnitřními zdroji, A_o je plocha výparníku a k_o je jeho součinitel prostupu tepla. Vztahy mezi nimi je možné znázornit v soustavě $Q - t$ (viz Obrázek č. 10), kde je rovnice (1) znázorněna přímkou svírající se souřadnicovou osou t úhel α , a platí

$$\frac{Q}{t_a - t_i} = A_a \cdot k_a = \operatorname{tg}(\alpha).$$



Obrázek č. 10: Závislost teplot, výkonu kompresoru a tepelného zatížení

Množství tepla, vyvíjeného v chlazeném prostoru Q_i , by procházelo stěnami chlazeného prostoru, kdyby teplota t_a byla vyšší o hodnotu

$$t_z - t_a = Q_i \cdot \cotg(\alpha).$$

Teplota t_z je tedy zdánlivou vnější teplotou, při níž by veškeré teplo odváděné výparníkem procházelo stěnami chlazeného prostoru.

Rovnice (2) je na obrázku znázorněna přímkou svírající s osou t menší úhel β . Pro ni platí

$$\frac{\bar{Q}}{t_i - t_o} = A_o \cdot k_o = \tg(\beta).$$

Přímka vedená pod úhlem γ z bodu na ose t ve vzdálenosti t_z od počátku prochází průsečíkem charakteristiky výparníku s charakteristikou kompresoru a je geometrickým místem chladicích výkonů kompresoru a vypařovacích teplot, pro které při daných hodnotách α , β a t_z platí

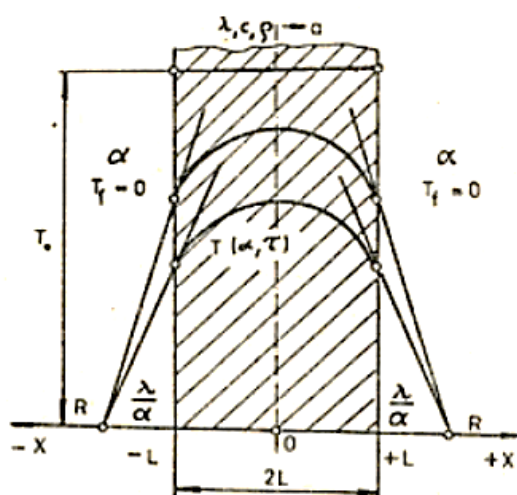
$$\tg(\gamma) = \frac{1}{\cotg(\alpha) + \cotg(\beta)}.$$

Jakákoli změna charakteristiky kompresoru, nebo změna teploty t_z , bude mít za následek změnu teploty chlazeného prostoru t_i i změnu vypařovací teploty t_o . Teplota t_i je tedy nejnížší dosažitelnou teplotou, která odpovídá jen konkrétní hodnotě t_z a konkrétnímu výkonu Q kompresoru. Obdobně vypařovací teplota t_o je nejnížší hodnotou dosažitelnou jen pro konkrétní hodnoty t_z a Q .

2.16 Ochlazování nebo ohřev rovinné desky^[14]

Zadání.

Máme vyřešit úlohu ochlazování nekonečné rovinné desky z homogenního materiálu. Známe počáteční rozdělení teplot $T_0 = konst.$, součinitel přestupu tepla α a teplotu okolního prostředí $T_f = 0$. Určíme rozložení teplot ve stěně v libovolném čase τ .



Obrázek č. 11: Ochlazování rovinné desky

Řešení.

Řešení této úlohy je popsáno diferenciální rovnicí vedení tepla:

$$\frac{\delta T}{\delta \tau} = a \frac{\delta^2 T}{\delta x^2}$$

s počáteční podmínkou v čase $\tau = 0$

$$T_0(x) = konst.$$

a okrajovými podmínkami 3. druhu pro ochlazování nebo ohřev v čase $\tau > 0$

$$\left[\frac{\lambda}{\alpha} \frac{\delta T}{\delta x} \pm T_n \right]_{x=\pm L} = 0.$$

Diferenciální rovnici vedení tepla vyřešil Fourier pomocí metody separace proměnných.

Partikulární řešení diferenciální rovnice je ve tvaru

$$T_{x,\tau} = T_x \cdot T_\tau$$

a výsledné řešení je

$$T_{x,\tau} = [A \cdot \cos(kx) + B \cdot \sin(kx)] \exp(-a \cdot k^2 \cdot \tau),$$

kde

k^2 je reálná kladná veličina libovolně zvolená, A a B jsou konstanty partikulárních řešení diferenciální rovnice. Konstanta k se určuje z hraničních podmínek a konstanty A a B z počátečních podmínek.

Výsledné řešení nestacionárního jednorozměrného vedení tepla lze vyjádřit jako součet nekonečného množství partikulárních řešení:

$$T_{x,\tau} = \sum_{i=1}^{\infty} [A \cdot \cos(k_i \cdot x) + B \cdot \sin(k_i \cdot x)] \exp(-a \cdot k_i^2 \cdot \tau).$$

V daném případě je tato funkce sudá vůči x a teplotní pole je symetrické. Můžeme ji zjednodušit na tvar

$$T_{x,\tau} = \sum_{i=1}^{\infty} [A_i \cdot \cos(k_i \cdot x)] \exp(-a \cdot k_i^2 \cdot \tau) \quad (1)$$

a dosazením do okrajové podmínky 3. druhu dostanu rovnici

$$\frac{\lambda}{\alpha} \cdot [(-A_i \cdot k_i \cdot \sin(k_i \cdot L)) \exp(-a \cdot k_i^2 \cdot \tau)] = -[A_i \cdot \cos(k_i \cdot L)] \exp(-a \cdot k_i^2 \cdot \tau).$$

Z té pak po úpravě vyplývá

$$\frac{\lambda}{\alpha} \cdot k_i = \cotg(k_i \cdot L).$$

V této rovnici označíme $\mu_i := k_i \cdot L$. Nyní zavedu Biotovo kritérium

$$\cotg(\mu_i) = \frac{1}{Bi} \cdot \mu_i. (*)$$

Odvozená rovnice má nekonečné množství kořenů a každý z nich vyhovuje okrajové podmínce úlohy. Grafická metoda určení kořenů charakteristické rovnice je na obrázku č. 5.

Uvažujeme-li rozložení teplot ve stěně v čase $\tau = 0$ rovno T_0 , lze rovnici (1) upravit na tvar

$$T_0 = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cdot \cos\left(\mu_i \cdot \frac{x}{L}\right).$$

Hledané konstanty lze tabelárně určit z rovnice (L8)

$$A_i = T_0 \cdot \frac{2 \cdot \sin(\mu_i)}{\mu_i + \sin(\mu_i) \cdot \cos(\mu_i)}.$$

2.17 Červenkovovo záření^[15]

Čerenkovovo záření vzniká jako důsledek polarizace média relativisticky se pohybující nabitou částicí. Nabitá částice pomalu letící transparentním prostředím polarizuje toto prostředí podél své dráhy. Atomy na dráze částice se mění v malé dipóly, které po průchodu částice ihned relaxují a vrací se do svého základního stavu. Pokud polarizující částice letí relativistickou rychlostí, vzniká pole, které dosahuje do velkých vzdáleností. Pokud je rychlost polarizující částice větší než fázová rychlost světla v médiu, vzniká pole, které lze detekovat na velkých vzdálenostech. Jednotlivé vlny pocházející z různých bodů na dráze polarizující částice se zkombinují do rovinné vlny a v určitém směru vzhledem k vektoru rychlosti polarizující částice je produkováno tzv. koherentní záření. Toto záření je pozorováno pouze v kuželi podél její dráhy. Vrcholový úhel takového kužele je

$$\cos(\psi) = \frac{c}{v \cdot n},$$

kde c je velikost rychlosti světla ve vakuu, v je rychlost polarizující částice a n je index lomu prostředí.

V médiu s indexem lomu

$$n = \frac{c}{v_\gamma},$$

kde v_γ je velikost rychlosti kvanta γ v médiu, se pohybuje nabitá relativistická částice rychlostí $v > v_\gamma$ a její klidová energie je $m \cdot c^2$. Předpokládáme, že energie odnesená γ -kvantem je velmi malá vzhledem k energii vyzařující částice, což zapíšeme

$$E_\gamma \ll E = \gamma \cdot m \cdot c^2,$$

kde $\gamma^{-2} = 1 - \beta^2$ a rychlost částice $v = \beta \cdot c$.

Označme $P = (E, \vec{p}c)$ čtyřhybnost částice před emisí Čerenkovova světla, P' je čtyřhybnost koncové částice a $P_\gamma = (E_\gamma, \vec{p}_\gamma c)$ je čtyřhybnost emitovaného kvanta γ . Pro kvantum γ v médiu platí

$$E_\gamma = p_\gamma \cdot v_\gamma, \text{ a}$$

$$P_\gamma^2 = E_\gamma^2 \cdot (1 - n^2) < 0,$$

kde

$$n = \frac{c}{v_\gamma} = \frac{p_\gamma \cdot c}{E_\gamma}.$$

Ze zachování energie a hybnosti,

$$(P + P_\gamma)^2 = \dot{P}^2 = m^2 \cdot c^4,$$

dostaneme rovnost

$$E_\gamma^2 \cdot (1 - n^2) + 2 \cdot E \cdot E_\gamma - 2 \cdot p \cdot p_\gamma \cdot c^2 \cdot \cos(\psi) = 0,$$

kde ψ je úhel, pod kterým Čerenkovovo světlo vyletí vzhledem ke směru letu původní částice. Protože E_γ je podstatně menší než E a E je přibližně rovno $p \cdot c$, dostáváme pak pro směr emitovaného Čerenkovova fotonu

$$\cos(\psi) = \frac{E \cdot E_\gamma}{p \cdot p_\gamma \cdot c^2} - \frac{E_\gamma^2 \cdot (n^2 - 1)}{2 \cdot p \cdot p_\gamma \cdot c^2} = \frac{1}{\beta \cdot n} - \frac{E_\gamma}{p \cdot c} \cdot \frac{(n^2 - 1)}{2 \cdot n} \doteq \frac{1}{\beta \cdot n}.$$

Předpokládáme, že voda má index lomu $n = 1,33$. Aby v ní elektron produkoval Čerenkovovo záření, musí platit

$$\cos(\psi) = \frac{1}{\beta \cdot n} \leq 1,$$

odkud je

$$\beta \geq \frac{1}{n}.$$

Proto pro prahovou energii elektronu, který ve vodě vyvolá Čerenkovovo záření, platí

$$E_t = E(\beta = \frac{1}{n}) = \gamma \cdot m_e \cdot c^2 = \frac{n}{\sqrt{n^2-1}} \cdot m_e \cdot c^2 \doteq 0.775 MeV.$$

Vyjádření pro γ jsme odvodili z předchozích vztahů: protože

$$\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2}, \text{ a}$$

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{1}{n},$$

tak po dosazení dostáváme

$$\gamma^2 = \frac{1}{1-(\frac{1}{n})^2},$$

odkud po úpravách plyne

$$\gamma = \frac{n}{\sqrt{n^2-1}}.$$

Je-li energie E elektronu prahová, pak Čerenkovovo záření ve vodě letí ve směru pohybu elektronu. Pokud má elektron energii $E = 5 \cdot m_e \cdot c^2$, tak je $p \cdot c = \sqrt{24} \cdot m_e \cdot c^2$, kde $m_e \cdot c^2 = 0,511 MeV$ je klidová energie elektronu, a velikost úhlu β zjistíme ze vztahu

$$\beta = \frac{p \cdot c}{E}.$$

Po dosazení zadaných hodnot dostaneme výsledek

$$\beta = \sqrt{\frac{24}{25}}.$$

Úhel emise Čerenkovova záření vyvolaného elektronem o této energii je roven

$$\psi = \arccos\left(\frac{1}{\beta \cdot n}\right),$$

kde arkus kosinus je funkce inverzní k funkci kosinus. Po dosazení zjistíme, že úhel ψ je přibližně roven $\psi = 39^\circ 53'$. Maximální úhel emise Čerenkovova záření vyvolaného elektronem ve vodě je

$$\psi_{max} = \psi(\beta \rightarrow 1) = \arccos\left(\frac{1}{n}\right),$$

což je přibližně $41^{\circ}15'$. Klidová energie protonu je rovna $m_p \cdot c^2 = 938,3 \text{ MeV}$. S využitím tohoto faktu můžeme analogicky spočítat velikost prahové energie protonu, který vyvolává Čerenkovovo záření ve vzduchu s indexem lomu $n = 1,00029$ ze vztahů

$$E_t = E\left(\beta = \frac{1}{n}\right) = \gamma \cdot m_p \cdot c^2 = \frac{n}{\sqrt{n^2-1}} \cdot m_p \cdot c^2 = 39,0 \text{ GeV}.$$

Maximální úhel emise Čerenkovova záření je roven

$$\psi_{max} = \psi(\beta \rightarrow 1) = \arccos\left(\frac{1}{n}\right),$$

což je přibližně $1^{\circ}23'$. Z těchto výpočtů je zřejmé, že prahová energie částice nutná pro vznik Čerenkovova záření v médiu se snižuje (přibližně exponenciálně) s rostoucí hodnotou tohoto indexu.

Závěr

V práci jsou představeny aplikace goniometrických funkcí především v oblastech, ve kterých se typicky objevují, a také v oblastech, kde je jejich použití spíše okrajové; každý příklad takového použití je v práci uveden v samostatné kapitole. Seznam témat uvedených v práci však samozřejmě není vyčerpávající, neboť možností použití goniometrických funkcí ve vědě je podstatně více. Cílem práce ale je představit rozsah témat dostatečně široký, ale současně má být tato bakalářská práce srozumitelná i čtenářům, kteří se v problematice příliš neorientují. Domnívám se, že srozumitelná je, protože jsem na úvod každé kapitoly zařadil stručný výklad problematických pasáží kapitoly. Oproti tomu určitá znalost matematiky se předpokládá, proto je ve složitějších příkladech zmíněn jen základní postup výpočtu a samotný výpočet (např. postup při upravování algebraických výrazů) je většinou vynechán; výsledek příkladů je samozřejmě uveden vždy.

Cíl práce stanovený v úvodu byl splněn s přihlédnutím k již zmíněnému – úplný seznam příkladů užití goniometrických funkcí nelze zahrnout do bakalářské práce. Práce

představuje reprezentativní a aktuální výběr jejich aplikací i přes to, že většina zdrojů literatury je již staršího data.

Seznam použitých informačních zdroj

- [1] ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia*. Vydání čtvrté. Praha: Prometheus, 2009. ISBN: 978-80-7196-359-2
- [2] HAVRÁNEK, Antonín. *Klasická mechanika 1. Hmotný bod a tuhé těleso*. Vydání první. Praha: Karolinum, 2002. 242 stran. ISBN: 80-246-0458-2
- [3] HAJKO, Vladimír a kol. *Fyzika v příkladoch*. Vydání páté. Bratislava: Alfa, 1983. 592 stran. ISBN: neuvedeno
- [4] UNGERMANN, Zdeněk. *Matematika a řešení fyzikálních úloh*. Vydání první. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1990. ISBN: 80-04-22957-3.
- [5] ZADRAŽIL, Tomáš. *Metody řešení diferenciálních rovnic*. Bakalářská práce. Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta. Katedra didaktiky matematiky, Praha 2015.
- [6] URGOŠÍK, Bohuš. *Fyzika*. Vydání druhé. Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1987. 296 stran
- [7] HALAHYJA, Martin. *Stavebná tepelná technika, akustika a osvetlenie*. Vydání první. Bratislava: Alfa, 1985. 752 stran. ISBN: neuvedeno
- [8] KVASNICA, Jozef. *Matematický aparát fyziky*. Vydání první. Praha: Akademia, 1997.
- [9] KOLOC, Zdeněk. *Váčkové mechanismy*. Vydání první. Praha: Nakladatelství technické literatury, 1988. 384 stran.
- [10] ZÝKA, DrSc., Jaroslav. *Analytická příručka*. Díl druhý. Vydání třetí. Praha: Nakladatelství technické literatury, 1980. 832 stran. ISBN: neuvedeno
- [11] HUŠEK, Roman. *Simulační modely*. Vydání první. Praha: Nakladatelství technické literatury, 1987. 352 stran.
- [12] ROUŠAR, Ivo a kol. *Technická elektrochemie 2*. Vydání první. Praha: Academia, 1981. 328 stran
- [13] POLÁK, Vilém. *Automatizace chladicích zařízení*. Vydání první. Praha: Nakladatelství technické literatury, 1983. 288 stran

[14] KOLAT, Pavel. *Přenos tepla a hmoty*. Vydání první. Ostrava: VŠB – Technická literatura, 1986. 266 stran

[15] NOSEK, Dalibor. *Jádra, částice a experiment*. Vydání první. Praha: Matfyzpress, 2013. ISBN: 978-80-7378-197-2